Revista Brasileira de Expressão Gráfica

DETERMINAÇÃO DOS PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE UMA CÔNICA A PARTIR DOS SEUS CINCO PONTOS DE DEFINIÇÃO

Franck Bellemain [1]
Luiz Carlos Guimarães [2]

Resumo: A construção de cônicas em um ambiente de geometria dinâmica demanda, na maioria das implementações disponíveis, a especificação prévia de 5 pontos por onde passa a curva. Essa escolha de modo de construção e interface associada tem boas razões de ser – a equação de uma cônica pode ser unicamente determinada, em geral, por estes cinco pontos. Internamente, os aplicativos utilizam ferramentas algébricas e de análise para determinar a equação a partir das coordenadas dos pontos dados e em seguida aplicam algoritmos de traçado. Propomos nesse texto apresentar como, a partir de conhecimentos de geometria gráfica, poderíamos determinar alguns dos elementos geométricos característicos de uma cônica diretamente a partir de cinco dos seus pontos, particularmente aqueles elementos que facilitam o traçado da mesma.

Palavras-chave: cônica, geometria dinâmica, gráfica computacional.

Résumé: La construction de coniques dans un environnement de géométrie dynamique demande, pour la plupart des implémentations disponibles, la désignation de 5 points de la courbe. Ce choix de mode de construction et interface associée est justifié par le fait que une conique peut être déterminée, dans le cas général par ces cinq points. En interne, les applications utilisent des outils d'algèbre et d'analyse pour déterminer l'équation de la conique à partir des coordonnées des points donnés, pour ensuite mettre en œuvre les algorithmes de tracé. Nous proposons dans ce texte de montrer comment, à partir de connaissances de géométrie graphique, quelques uns des éléments géométriques caractéristiques d'une conique directement à partir de cinq points de cette conique, particulièrement, les éléments géométriques qui facilitent le tracé de cette conique.

Keywords: conique, géométrie dynamique, infographie.

[1] Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Expressão Gráfica - CAC, Brasil. f.bellemain@gmail.com.
[2] Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática Aplicada e LIMC-UFRJ, Brasil. lcg@ufrj.br

1 Introdução

A maioria dos *software* de geometria dinâmica, quando permitem a representação de cônicas, disponibilizam interfaces que criam cônicas a partir da escolha de cinco dos pontos conhecidos da curva (Figura 1).

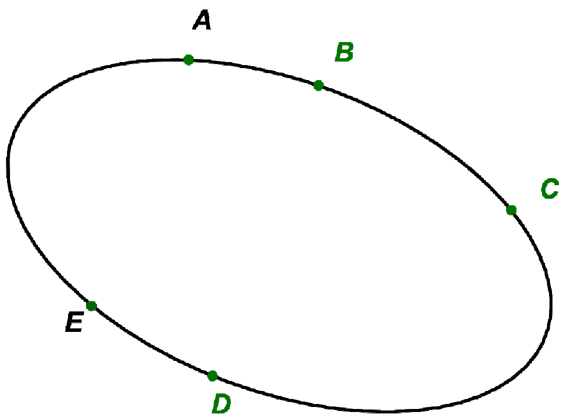

Figura 1 - Cônica por cinco pontos

Essa definição de cônicas a partir de cinco pontos não é necessariamente mais geral que outras caracterizações planares, como aquela a partir da diretriz e excentricidade ou a partir da circunferência diretora e de um ponto. Ela também não é sempre um modo de construção prático em geometria gráfica, quando são conhecidos alguns elementos característicos da cônica como os focos, a circunferência diretora, etc. Mas, é o modo de construção majoritariamente escolhido porque do ponto de vista do principio de manipulação direta, construir uma cônica a partir de cinco dos seus pontos parece a escolha "mais natural" - a interface que se aproxima mais de um traçado a mão livre.[3]

Nesse contexto, uma primeira questão que surge é aquela de saber como uma cônica pode ser graficamente representada uma vez conhecidos cinco dos seus pontos. Em outras palavras, como se pode determinar qualquer ponto de uma cônica conhecendo cinco pontos da mesma. Na continuação da abordagem da geometria de Descartes, encontram-se procedimentos algébricos, assim como procedimentos geométricos.

De um ponto de vista algébrico, as cônicas são curvas do segundo grau, ou seja, curvas determinadas por uma equação do tipo: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, onde

[3] De qualquer forma, como a maioria dos programas de geometria dinâmica permitem ao usuário a criação de novas ferramentas de construção (as macro-construções do Cabri-géomètre [BELLEMAIN & LABORDE, 1997], por exemplo), pode-se criar um modo de construção de cônicas a partir de uma diretriz e a excentricidade ou uma circunferência diretora e um ponto.

a, b e c não são nulos ao mesmo tempo. Numa tal abordagem, é simples mostrar que cinco pontos são, em geral, suficientes para determinar uma única cônica: dividindo os coeficientes da equação por um deles que não seja nulo, precisamos determinar os outros cinco coeficientes e, para isto, as coordenadas de cinco pontos conhecidos da curva são suficientes no caso geral: cinco pontos fornecem cinco pares de valores (x, y) que determinam um sistema linear de cinco equações com cinco incógnitas (os coeficientes), sistema que, em geral, tem uma solução única determinando a equação da cônica passando por esses cinco pontos.

Essa caracterização de uma cônica como curva do segundo grau passando por cinco pontos tem seu equivalente como lugar geométrico graças à propriedade do hexágono místico de Pascal: os pontos de interseção dos lados opostos de um hexágono qualquer, desde que inscrito numa cônica, estão alinhados (Figura 2). Com a propriedade do hexágono místico, a cônica passando por cinco pontos A, B, C, D e E é o lugar geométrico dos pontos F tal que os pares de lados opostos do hexágono A, B, C, D, E e F se encontram em pontos alinhados.

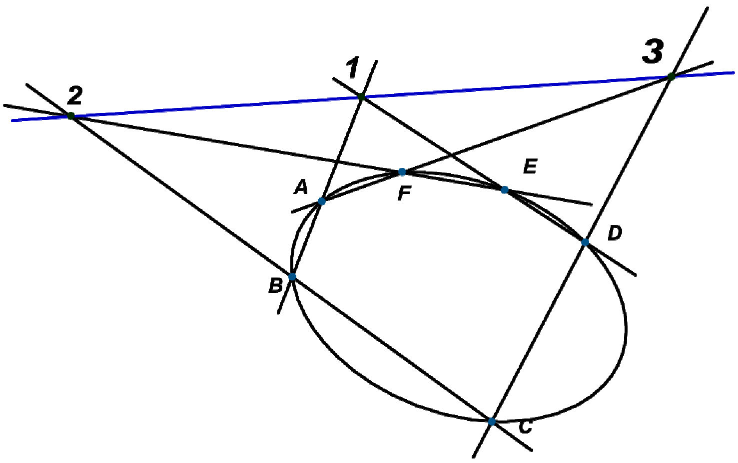

Figura 2 - Hexágono místico

Sem ter acesso ao código, fica muito difícil determinar, somente pela representação gráfica na tela, os procedimentos empregados por um *software* de geometria dinâmica para representar a cônica quando são designados cinco pontos. Mesmo se os *software* utilizam procedimentos diferentes, a parte visível desses procedimentos é o conjunto de pixels que melhor aproxima a cônica representada, *pixels* que são acessíveis através das suas coordenadas, assim como os cinco pontos que caracterizam a cônica. De fato, qualquer que seja o procedimento, ele passa por cálculos de coordenadas, e finalmente, a questão é saber qual é a parte do estudo geométrico das cônicas envolvidas na representação das mesmas em software de geometria dinâmica. Conhecendo os casos do Cabri-géomètre (BELLEMAIN &

LABORDE, 1997) e do Tabulae (GUIMARÃES & BARBASTEFANO, 2000) por ter acesso ou ter tido acesso ao código desses *software*, e supondo que a maioria dos outros programas utilizam procedimentos semelhantes, ou seja, determinam a equação da cônica e aplicam os algoritmos analíticos clássicos de traçado (FOLEY & AL, 1996). Não se pode considerar que nenhuma propriedade geométrica das cônicas é utilizada no traçado: a natureza geométrica da curva (elipse, parábola ou hipérbole) impõe propriedades de simetria ou de posição dos quadrantes da curva em relação à grade de *pixels* são aproveitadas para otimizar o algoritmo de traçado. Mas os procedimentos utilizados em *software* de geometria dinâmica para representar cônicas são principalmente algébricos, já pela simples razão da ferramenta algébrica ser mais familiar aos programadores do que a geometria.

Entretanto, do nosso ponto de vista, a representação das cônicas na tela de um computador possibilita uma maior geometrização dos procedimentos, como é o caso em muitos problemas matemáticos, ou mesmo científicos, onde uma abordagem geométrica pode fornecer soluções eficientes (como por exemplo na resolução do problema de Alhazen (GUIMARÃES & BELLEMAIN, 2004). O objetivo desse texto é argumentar no sentido de uma maior geometrização dos algoritmos de traçado de cônicas na tela de um computador, assim como explicitar como os principais elementos geométricos da cônica (centro, focos, eixos) podem ser extraídos, de forma inteiramente geométrica, da informação implícita ao especificarmos cinco pontos distintos da curva. Não será tratado nesse texto, mas apresentaremos em uma outra publicação como essas informações geométricas podem ser aproveitadas para efetivamente representar cônicas aproximando-as com curvas de Bezier, assim como extrair diversas informações geométricas a respeito da curva.

2 Da geometrização dos algoritmos de traçado das cônicas

É fato que os softwares de geometria dinâmica, mesmo representando graficamente objetos geométricos, determinam as informações necessárias à "pixelização"[4] da cônica definida por cinco pontos por métodos quase exclusivamente algébricos. Porém, mesmo sendo a álgebra uma ferramenta potente, a retórica das suas resoluções nem sempre é a mais fácil de interpretar. Em particular, os elementos que caracterizam a curva de um ponto de vista geométrico (focos, eixos, etc.) não estão explícitos, de forma intuitiva, nessas equações e, menos ainda, uma derivação "natural" desses elementos. Por outro lado, do ponto de vista de um usuário de

[4] Determinação dos *pixels* da interface gráfica mais próximos da curva representada, no caso da cônica.

software de geometria dinâmica, ou simplesmente de um usuário de geometria, representar cônicas é raramente uma finalidade mas sim uma etapa em um processo de construção geométrica onde a cônica, suas propriedades e seus elementos geométricos serão provavelmente utilizados. Nesse sentido, se na única perspectiva do traçado, as informações algébricas (equação) necessárias à “pixelização” podem ser suficientes, numa perspectiva mais ampla de resolução de problema de geometria gráfica, informações geométricas sobre a curva serão indispensáveis. Sendo provavelmente necessárias, por que não determinar e utilizar essas informações geométricas já para o traçado da cônica?

Continuando na perspectiva da utilização das cônicas em construções geométricas, existem situações onde uma abordagem geométrica pode ter uma contribuição importante quando a álgebra pode encontrar alguns limites. As informações analíticas com frequência não são suficientes para considerar todas as informações gráficas que o usuário pode utilizar na resolução de um problema. Para ilustrar essa questão, vamos considerar a situação seguinte: considera-se uma reta e uma cônica, ambas construídas utilizando um ponto em comum A.

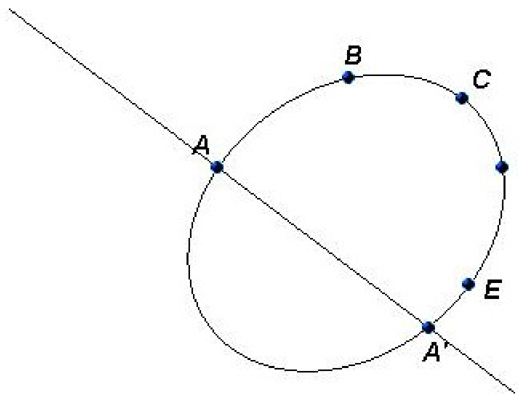

Figura 3 - Reta e cônica num mesmo ponto

Já o fato que A é comum à cônica e à reta não é uma informação analítica mas de incidência, ou seja, geométrica. Um usuário pode precisar do outro ponto A’, de interseção da cônica e da reta (Figura 3). Numa resolução analítica do problema, para ter certeza que vai ser construído o outro ponto A’ que não seja o ponto A, o sistema terá que comparar as coordenadas dos pontos construídos com as coordenadas de A, prevendo a margem de erro consecutiva à manipulação dos números da computação, que não são reais. Onde a álgebra propõe uma resolução pesada e indireta, a geometria, com a propriedade do hexágono místico de Pascal, permite determinar construtivamente o outro ponto de interseção da reta com a cônica apenas com retas, inclusive sem utilizar traçado da cônica (Figura 4). O que é interessante nessa situação, é que a maioria dos softwares de geometria não determinaria o ponto A’ como diferente de A, mas como a interseção mais próxima de onde o usuário mostrou com o mouse onde ele quer construir esse ponto. O que acontece, obviamente, é que durante o deslocamento dos pontos da Figura 4, existem casos onde os pontos A e A’ se confundem, ou seja, A’ não é sempre o outro ponto de interseção. A geometria garante sempre o outro ponto de interseção da reta com a cônica.

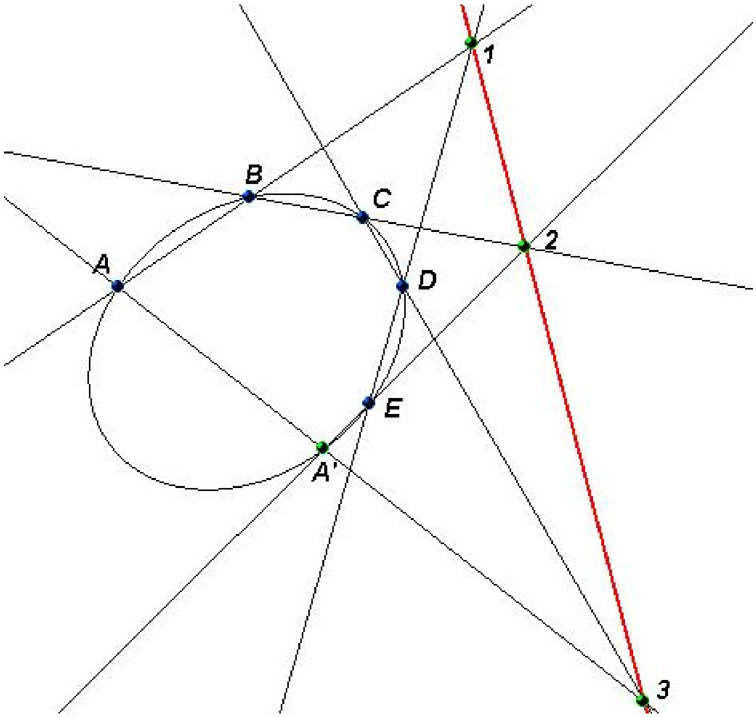

Figura 4 - Construção do outro ponto de interseção

Existem muitos outros exemplos onde informações gráficas e geométricas são importantes para enriquecer métodos algébricos. O contexto da geometria dinâmica e da manipulação direta favorece mais ainda o emprego de métodos geométricos nos procedimentos computacionais de construção e representação de objetos geométricos. O exemplo acima da construção do segundo ponto de interseção de uma reta com uma cônica mostra que a geometria, talvez mais que a álgebra, pode modelar as manipulações e intenções do usuário. Essa observação tem uma certa “naturalidade” pois as manipulações e intenções do usuário dizem respeito a elementos gráficos.

Em seguida, serão examinadas algumas construções alternativas que permitem, apoiadas nas propriedades geométricas das cônicas, determinar elementos úteis para realizar o traçado de uma cônica determinada por cinco pontos.

Implicitamente fica colocada a questão da automatização do processo, preliminar a uma versão computacional. Para todas as construções, usamos unicamente os cinco pontos (sem supor que o traçado esteja disponível) e como instrumentos apenas a régua e o compasso. São utilizados resultados e propriedades geométricas clássicas das cônicas e não são elaborados ou descobertos novas propriedades, apenas são utilizados esses resultados para explicitar um método original para um problema que se situa entre a geometria gráfica e a implementação gráfica computacional.

3 Das caracterizações geométricas das cônicas

A definição original das cônicas é serem as curvas de interseção de um plano com um cone de revolução. As primeiras referências conhecidas ao estudo das cônicas relatam que Menechme (~ 375 a 325 a.C.) considerava um plano de corte perpendicular a uma diretriz do cone. Cones de ângulo menor, maior ou igual ao ângulo reto davam origem a elipses, hipérboles e parábolas respectivamente. Essas curvas foram depois estudadas por Euclides (~ 380 a 350 b.C.) e Arquimedes (~ 287 a 212 a.C.), mas é no trabalho considerado como o maior tratado grego sobre as cônicas, produzido por Apolônio (~ 260 a 200 a.C.) que se introduz a nomenclatura que usamos hoje - elipse, parábola e hipérbole - se estudam, de forma bastante completa e utilizando a definição espacial, propriedades geométricas dessas curvas planas.

A partir da definição no espaço, outras caracterizações das cônicas foram elaboradas, como a caracterização com os focos (Kepler) ou a caracterização com foco-diretriz-excentricidade (Pappus). A verificação mais utilizada hoje dessas duas últimas caracterizações, a partir da seção do cone de revolução, é devida a Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847). Ele mostra (Figura 5 e Figura 6) que:

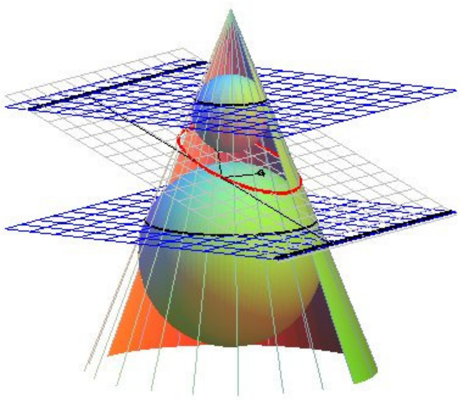

Figura 5 - Corte da superfície cônica

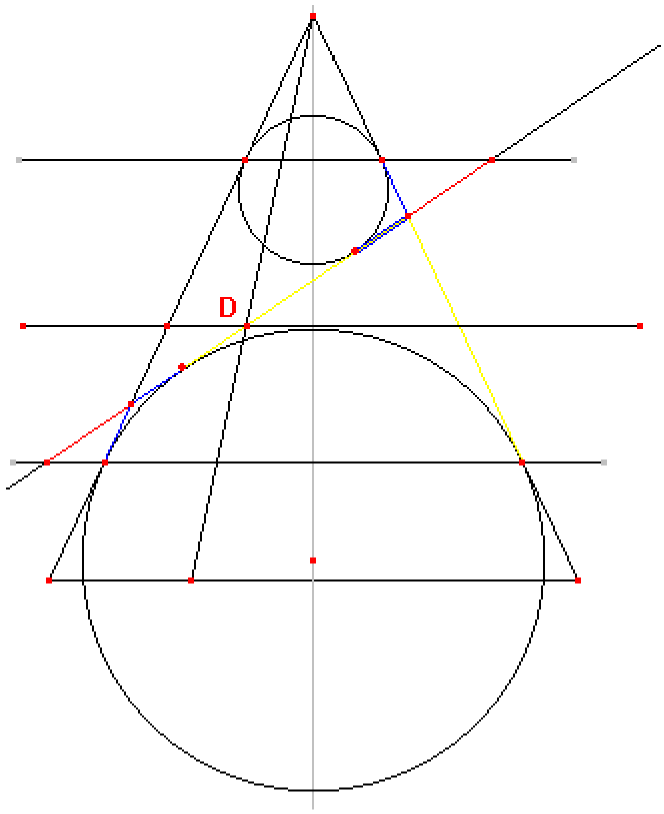

Figura 6 - Projeção ortogonal do tronco de cone, do plano de seção e das esferas tangentes a esse plano e ao interior do cone num plano paralelo ao eixo de revolução e perpendicular ao plano de seção.

- os focos da cônica definida pelo corte do cone por um plano são os pontos de contato de duas esferas (uma acima e uma abaixo do plano de corte) tangentes à superfície do cone,
- as diretrizes da seção são as retas de interseção do plano de corte com os planos das circunferências de tangência das duas esferas com a superfície.

As propriedades projetivas das cônicas começaram a ser estudadas pelos matemáticos e artistas que desenvolveram a perspectiva (Brunelleschi, Alberti, Della Francesca) no século 15, particularmente a caracterização da cônica como projeção de uma circunferência. Esses estudos atingem um ponto de destaque com o trabalho de Desargues e de La Hire. O resultado importante de Pascal a respeito do hexágono místico vem logo depois. Na segunda metade do século 19 foram se cristalizar as abordagens utilizadas nos currículos de diferentes países.

4 O hexágono místico de Pascal e a determinação do centro

A propriedade do hexágono místico (Figura 2) foi mostrada por Pascal no caso do hexágono inscrito numa circunferência. Como esta propriedade refere-se apenas a incidência e alinhamento, propriedades estas que são conservadas por transformações projetivas, ela continua sendo válida para qualquer imagem da circunferência por uma transformação projetiva, ou seja, para qualquer cônica: a propriedade do hexágono místico é uma propriedade geral das cônicas. No caso do círculo, a prova dessa propriedade de Pascal apoia-se em uma utilização simples da propriedade de Menelaus [FIC, 1960, pg. 334].

4.1 Ponto da cônica numa direção dada

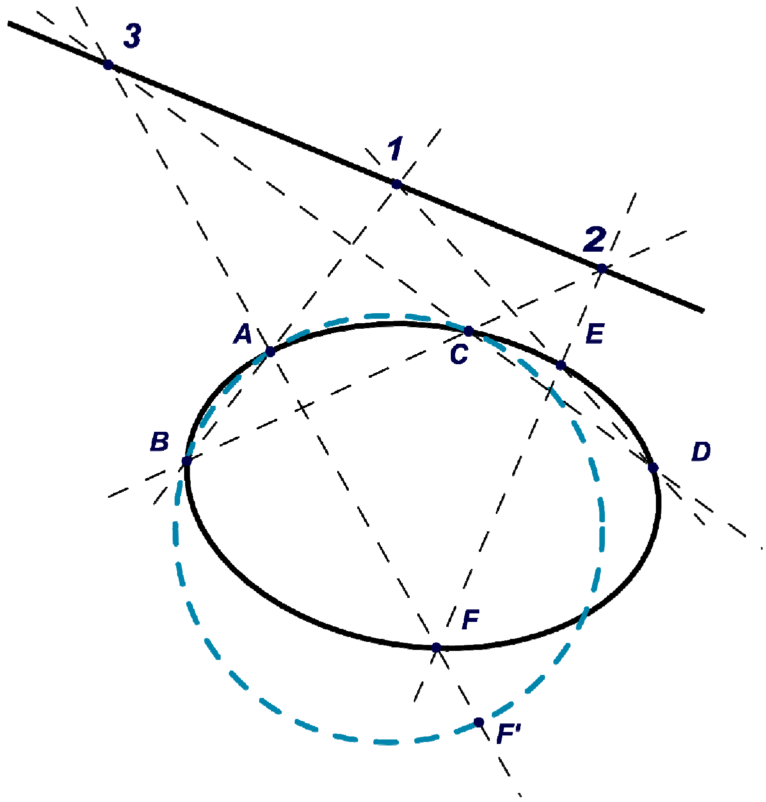

Figura 7 - Lugar geométrico do sexto vértice do hexágono místico

Esse teorema de Pascal, como já foi indicado, permite realizar o traçado de uma cônica como lugar geométrico conhecendo cinco dos seus pontos: os pontos A, B, C, D e E fazem parte de um hexágono inscrito na curva, e temos quatro lados consecutivos desse hexágono ([AB], [BC], [CD], [DE]). Podemos escolher arbitrariamente a direção de um sexto vértice (a reta (AF')) na Figura 7). A condição de que o sexto vértice do hexágono seja um ponto da cônica que passa pelos pontos A, B, C, D e E, determina a direção do sexto lado e, consequentemente a posição, sobre a reta AF’, do sexto ponto F. Nas figuras que se seguem, adotaremos sistematicamente a mesma notação utilizada na Figura 7:

- o ponto “1” é a interseção de AB e DE;
- o ponto “2” é a interseção de BC e EF, e
- o ponto “3” é a interseção de CD e AF.

O ponto “1” está sempre fixo, e “3” fica determinado quando selecionamos a direção AF’, encontrando-se na interseção dessa reta AF' com CD. A partir daí, a interseção da reta [1,3] com BC nos dá o ponto “2”, e a interseção da reta unindo este ponto ao ponto E com a reta AF’ nos dá o ponto F, que é o ponto procurado da cônica. Note que quando A=F, ainda se pode determinar os pontos “1” e “2”. A interseção da reta assim determinada com CD nos dá “3”. Unindo “3” ao ponto A, se tem a tangente à cônica nesse ponto.

Construindo as retas (AF’), a partir das diferentes direções para o quinto lado, podem ser construídos qualquer ponto Fn da cônica. Essa descrição fornece um procedimento de construção, gráfica e usando apenas a régua, de uma cônica a partir de cinco pontos. Na prática (no papel ou no computador), esse procedimento é bastante trabalhoso (em traçados auxiliares e em tempo de realização).

Uma forma de determinar todas as direções AF’ possíveis seria fazer com que F’ percorresse o círculo que passa pelos pontos A, B e C (Figura 7), círculo denotado como Γ_{ABC} no restante deste texto. Desse ponto de vista, se pode considerar uma transformação associando pontos F’ desse círculo a pontos da cônica que passa por A, B, C, D e E. Nessa construção, fica evidente que os pontos B e C são mantidos fixos, mas é menos claro de onde vêm os outros três pontos, A, D e E. Além disso, quando F’ coincide com A não temos definida uma direção, o que torna o processo incompleto.

Se pode remediar isto utilizando um conceito bem mais recente: uma transformação projetiva, ou projetividade, é uma composição de projeções cônicas. Como consequência, ela leva retas em retas, sem mudar a razão anarmônica. O teorema fundamental da geometria projetiva nos diz que, no plano, quatro pontos e suas respectivas imagens são suficientes para definir unicamente uma projetividade. Em outras palavras, se denotamos por D’ o ponto de interseção, distinto de A, da reta AD com o círculo Γ_{ABC} e E' o ponto de interseção, distinto de A, da reta AE com o círculo Γ_{ABC}, então a única projetividade que leva B, C, D’ e E’ respectivamente sobre

Vol. 2, N^{o}. 1, 2014, ISSN 2318-7492

os pontos B, C, D e E é exatamente a transformação definida pela propriedade de Pascal (Figura 7).

Usando este ponto de vista, fica clara a dificuldade em extrair dos cinco pontos as propriedades fundamentais utilizadas no enfoque tradicional para as cônicas em desenho geométrico: uma projetividade não preserva nem comprimentos nem ângulos. Como obter centro, focos e eixos nesse contexto?

Vamos recorrer a propriedades bem conhecidas para obter a informação que buscamos. Por exemplo, sabemos que existe uma reta unindo os pontos médios de todas as cordas paralelas de uma cônica, e que ela passa pelo seu centro (isto é um diâmetro da cônica).

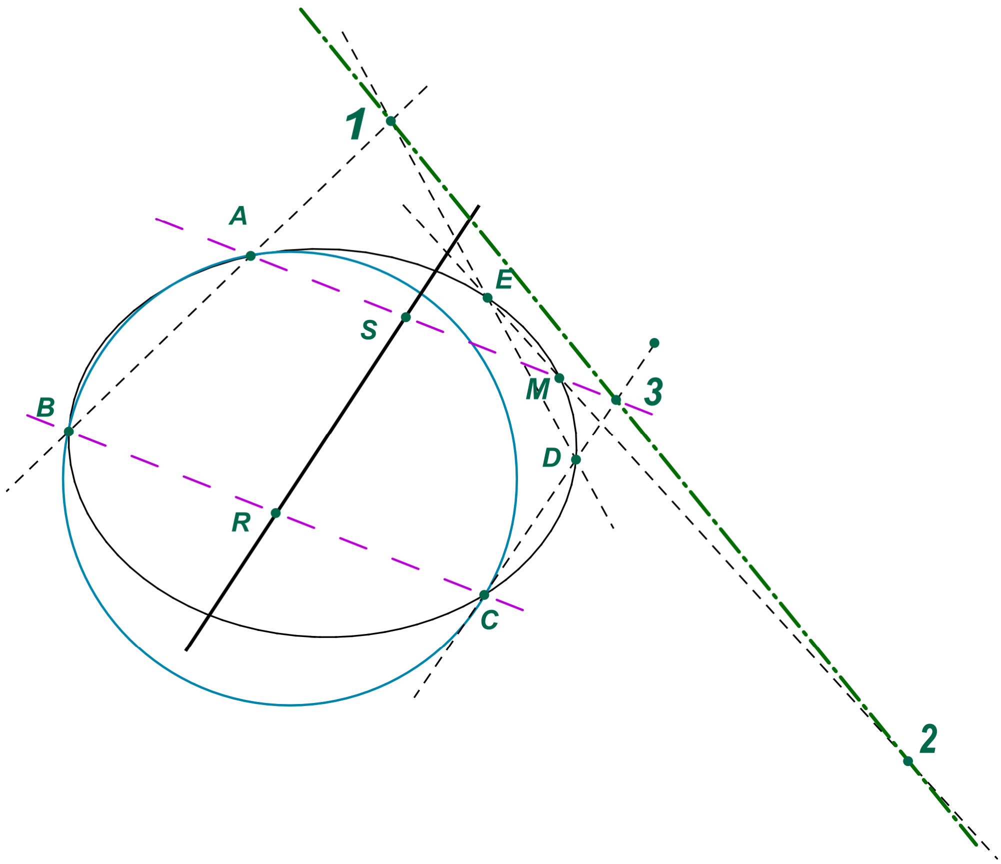

Figura 8 - Construção de um diâmetro

Considere-se, na Figura 8, a corda BC e, constrói-se, pelo ponto A, a paralela a essa reta. O segundo ponto onde essa reta encontra Γ_{ABC} nos dá o ponto M' da circunferência Γ_{ABC} que vem a ser projetado em M. Obtemos desta forma, em princípio, a extremidade M dessa segunda corda. A reta unindo os pontos médios de BC e AM é um diâmetro da cônica, mas não temos, inicialmente, as suas extremidades. Para obtê-las, observe-se que a reta A'M', que é projetada em AM, intercepta a reta BC em um ponto J' (Figura 9). A nossa projetividade deve projetar esse ponto no ponto no infinito na direção de BC, uma vez que as retas AM e BC são construídas paralelas. Agora temos tudo de que necessitamos: pelo ponto J', constroem-se as tangentes a Γ_{ABC}, obtendo P' e Q' como os pontos de tangência. As retas AP' e AQ' interceptam a cônica exatamente nas extremidades do diâmetro que construímos, isto é, temos agora um diâmetro PQ. O ponto médio desse diâmetro é o centro O da cônica.

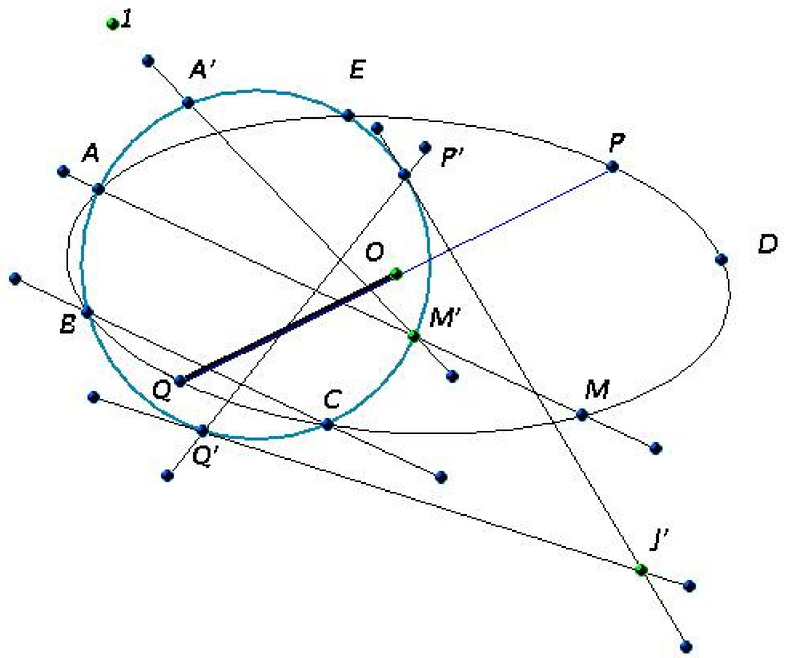

Figura 9 - Extremidades de um diâmetro

Mas podemos ir além, e construir o diâmetro conjugado a PQ. Para isso, constrói-se a paralela a PQ a partir do ponto A, obtendo o ponto N' onde essa reta intercepta Γ_{ABC}. A interseção das retas A'N' e P'Q' nos dá o ponto K', que é projetado no ponto no infinito na direção de PQ. Construindo as tangentes a Γ_{ABC} a partir de K', obtemos R' e S' – as retas AR' e AS' interceptam a cônica exatamente nas extremidades do diâmetro conjugado a PQ (ver Figura 10).

Uma vez de posse de dois diâmetros conjugados, temos ao nosso dispor o repertório tradicional de construções do Desenho Geométrico, que nos permite construir os elementos que quisermos da cônica. Por exemplo, (MELLO & CUNHA, 1951, pgs. 180, 269 e 276) traz construções para as três cônicas a partir desses elementos. Note que o tratamento que proposto aqui é bem mais simples do que o seguido em (GUILLERAULT, 1998).

Vol. 2, N°. 1, 2014, ISSN 2318-7492

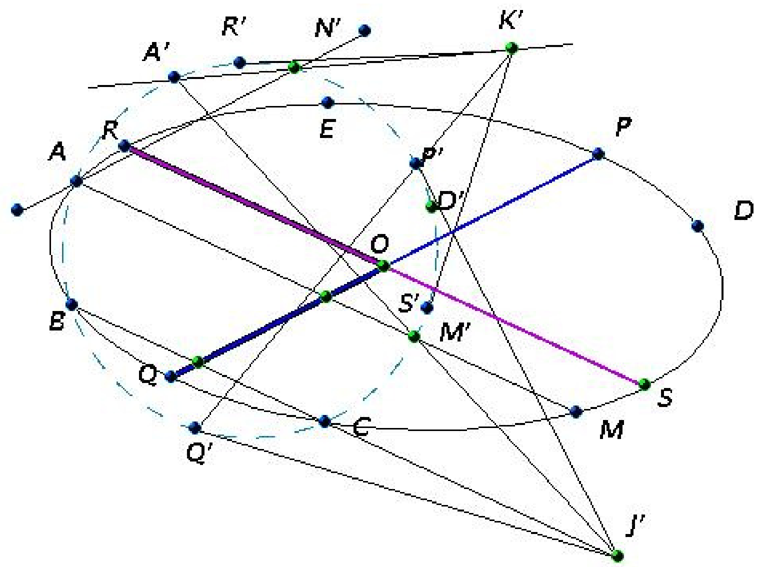

Figura 10 - diâmetros conjugados

5 O ponto de Frégier

Mesmo se a determinação dos eixos da cônica pode ser feita sem utilizar a propriedade do ponto de Frégier, se mostra como esse ponto permite determinar os mesmos (GUILLERAULT, 1998). O interesse pelo ponto de Frégier é devido ao fato que é um ponto particular das cônicas pouco conhecido, mesmo sendo interessante. Ele permite uma construção de uma tangente num ponto da cônica a partir da curva e sem utilizar nenhum outro elemento geométrico particular da cônica. Se pode ver como determinar o ponto de Frégier de um dos pontos iniciais, por exemplo o ponto A. Seja A um ponto da cônica, e B e C dois outros pontos da curva tais que o triângulo BAC é retângulo em A. O círculo Γ_{ABC}, circunscrito a esse triângulo, encontra a cônica em um quarto ponto, D (Figura 11). Em A, tome a tangente à cônica, que encontra novamente o círculo Γ_{ABC} no ponto F.

Seja D' o ponto do círculo diametralmente oposto a F. Portanto, o ângulo $\widehat{FAD'}$ é reto, isto é, AD' é a normal à cônica em A. Considere-se agora o ponto E', diametralmente oposto a D, e o ponto E, da cônica, onde A reta AE' encontra novamente essa curva. São considerados os pontos B, C, D e E como as projeções, com centro no ponto A, dos pontos B, C, D e E'. Da mesma forma, o ponto Fr, interseção das retas BC e DE, é a projeção do ponto I, centro do círculo Γ_{ABC}, pela mesma transformação. Essa transformação nada mais é do que a (única) projetividade que leva os pontos B, C, D e F respectivamente nos pontos B, C, D e A.

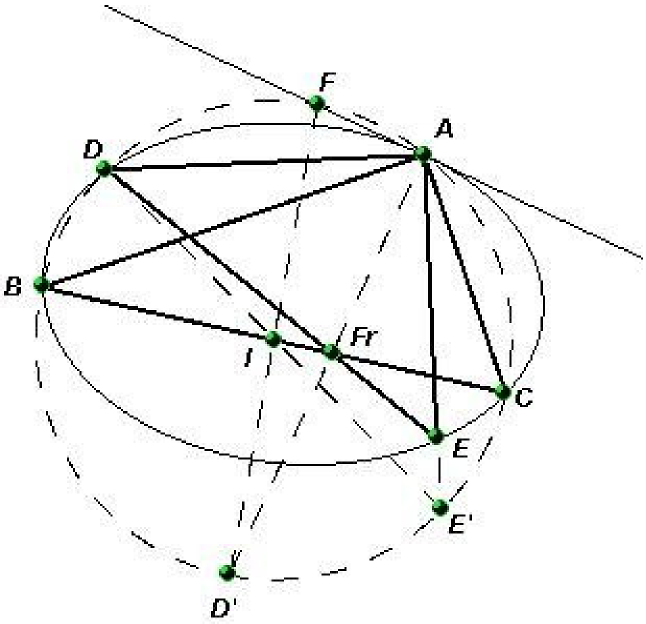

Figura 11 - Ponto de Frégier

Agora considere-se um terceiro triângulo GAH, também retângulo em A e inscrito na cônica. A imagem, pela projeção mencionada anteriormente, do lado G'H', diâmetro do círculo Γ_{ABC}, é a corda GH da cônica, que terá de conter também o ponto Fr.

Assim, temos a propriedade seguinte: considerando um ponto A de uma cônica, todas as cordas [MN] da cônica tais que [MA] e [NA] são perpendiculares em A se encontram em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de ponto de Frégier associado ao ponto A da cônica.

Observe que:

- uma vez provada a existência do ponto de Frégier, a projeção não é necessária para determinar sua posição: apenas dois pares de cordas da cônica que formem com A ângulos retos são necessárias;
- como consequência da prova que utilizamos, segue-se que a reta AFr é a normal à cônica no ponto A.

Esta prova é consideravelmente mais simples do que a utilizada por Guillerault, e a ideia nos ocorreu a partir de (FIC, 1960).

Usado juntamente com o centro Ce da curva, Fr nos dá uma outra forma de construir os eixos da cônica: constrói-se o círculo, com centro em Ce passando pelo ponto A, e suas interseções com a reta determinada pelos pontos Fr e Ce. Se A1 e A2 são esses pontos, então as mediatrizes dos segmentos AA1 e AA2 são os eixos que buscamos (Figura 12).

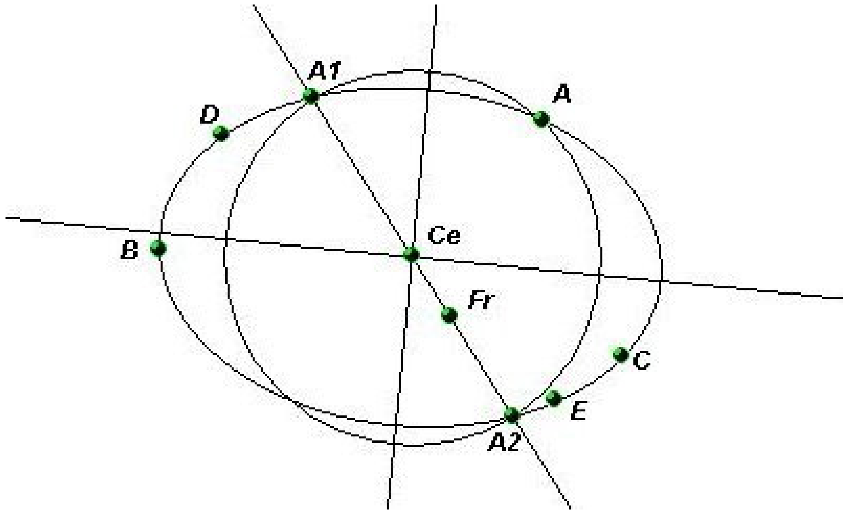

Figura 12 - Eixos pelo ponto de Frégier

No caso particular da parábola, o centro é um ponto no infinito e o diâmetro que passa por Fr determina um triângulo retângulo em A tendo um cateto paralelo ao diâmetro passando por Fr e o outro perpendicular a esse diâmetro e o encontrando num ponto A' da parábola. A mediatriz de A e A' é o eixo da parábola.

Mesmo se a propriedade de Frégier permite a determinação dos eixos da cônica, ela não fornece as extremidades desses eixos, sendo necessária outra construção sendo necessária. A projetividade tem a vantagem de fornecer os eixos da cônica assim como suas extremidades.

6 Considerações finais

Pelas construções apresentadas, foi mostrado que todas as informações geométricas de uma cônica determinada por cinco pontos, assim como qualquer ponto da curva, podem ser determinadas a partir desses pontos com a régua e o compasso. Uma crítica possível dessa abordagem por construções geométricas seria o argumento que se pode obter com a álgebra todas estas informações. Entretanto, um argumento geométrico ligado ao aspecto estético, à elegância, ao desafio de resolver o problema posto e à questão da percepção e compreensão das construções pode ser oposto ao argumento algébrico. Da mesma forma que certas informações geométricas (simetria, sobretudo) sobre a cônica permitem otimizar os algoritmos de traçados, outras informações geométricas mais complexas para um leigo, como aquelas apresentadas nesse texto, podem também fornecer atalhos nesses mesmos algoritmos de traçado e nas construções geométricas de cônicas.

Voltando agora ao contexto da disciplina de Desenho Geométrico. Como objeto de estudo, uma disciplina prospera enquanto pode oferecer o desafio de problemas interessantes para aquele que a pratica. Ora, tem se aqui uma oportunidade de revisitar alguns textos antigos de geometria. Problemas do tipo: encontrar os pontos de interseção de uma reta com uma cônica, dados apenas elementos suficientes para determinar a curva, constituam problemas interessantes e desafiadores para os iniciantes da disciplina de geometria gráfica. Um exemplo seria: “Usando apenas a diretriz e o foco de uma parábola, encontre os pontos de interseção dessa curva com uma reta dada”. A exposição feita até aqui ensina que o problema “Usando apenas quatro pontos dados de uma parábola, encontre...” poderia ser reduzido ao caso anterior. No entanto, encontrar uma solução direta, sem a prévia redução, representa um problema muito mais desafiador e interessante.

Outro exemplo de bônus do tipo de raciocínio utilizado aqui pode ser exemplificado se recorremos novamente à primeira figura (Figura 1) deste trabalho. Evidentemente, se poderia construir uma representação fiel da situação espacial recorrendo à geometria descritiva e à axonometria. No entanto, algumas ideias simples de geometria projetiva nos dão as informações suficientes para obter o mesmo resultado.

Para terminar, proporemos para os leitores duas questões com as quais estamos trabalhando:

- Utilizar as explorações apresentadas nesse texto em algoritmos de traçado de cônicas,
- Determinar as construções geométricas de cônicas definidas por cinco pontos ou retas tangentes.

O trabalho de Siqueira et al. (2011) propõe a utilização da homologia para determinar informações geométricas da cônica a partir de uma circunferência homóloga. O método proposto pelos autores permite provavelmente encontrar os resultados apresentados aqui mesmo se as construções que eles fazem necessitam conhecer uma reta tangente e o ponto de tangência à cônica. O pano de fundo de nosso trabalho como do de Siqueira et al (2011) é a geometria projetiva. Uma das nossas contribuições mais especificas é a de resgatar resultados antigos e frequentemente esquecidos.

Referências

BELLEMAIN, F.; GUIMARÃES, L. C. . Determinação de elementos característicos de uma cônica a partir dos seus cincos pontos de definição. In: GRAPHICA 2005: XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e VI International

Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, Recife. Anais do... Recife : Companhia Editora de Pernambuco, 2005. v. 1. p.1-10.

BELLEMAIN, F.; LABORDE, J.M., **Cabri-géomètre II**, version 1.0 Windows 3.1, 95 et NT, Texas-Instruments, Dallas: 1997.

F.I.C. **Elementos de Geometria**. Tradução de E. B. Raja Gabaglia, Rio de Janeiro Livraria Francisco Alves, 584p, 1960.

FOLEY, J. D.; VAN DAM, A.; FEINER, S. K.; HUGHES, J. F., **Computer Graphics: Principles and Practice in C**, 2nd Edition, New York: Addison-Wesley, 1996

GUILLERAULT, M. Le point de vue de Cabri II sur les coniques. Première Université d'été Cabri-géomètre, Grenoble. Actes da... Grenoble: IMAG, 1996.

GUIMARÃES, L.C.; BELLEMAIN, F, Reflections on the Problema Alhazeni, TSG Geometry-The 10th International Congress on Mathematical Education-ICME10, Copenhagen, July 4-11, Denmark: 2004.

GUIMARÃES, L. C.; BARBASTEFANO, R., **Tabulæ** - **Educational Software**, UFRJ , Rio de Janeiro: 2000.

MELLO e CUNHA, G. N. **Curso de desenho Geométrico e Elementar**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 460p, 1951.

SIQUEIRA, P.H. ; SOUZA, L.V. ; COSTA, D.M.B. Transformações homológicas da circunferência. In: Graphica 2011: XX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e IX International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, 2011, Rio de Janeiro, RJ. Anais do.... Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. p. 736-747.