

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE TANGÊNCIA POR INVERSÃO: UMA APLICAÇÃO À ARTILHARIA

*Jansley Alves Chaves¹
Maria de Fátima dos Santos Galvão²
Vânia Maria Rocha Gomes³*

Resumo: Neste artigo, estudaremos as transformações geométricas, particularmente o estudo das inversões geométricas. Veremos que o conjunto destas transformações forma um grupo com a operação de composição, que as mesmas são conformes, ou seja, que estas transformações preservam ângulos. Por meio da inversão geométrica, mostraremos que essa transformação aplica circunferências generalizadas em circunferências generalizadas, mas não necessariamente circunferências em circunferências ou retas em retas, pois estas podem ser trocadas. Apresentaremos a inversão geométrica definida no plano e, por fim, uma aplicação prática de tangência.

Palavras-chave: transformação geométrica, inversão geométrica, tangência.

Résumé: Dans cet article, nous allons étudier les transformations géométriques, particulièrement l'étude des inversions géométriques. Nous allons voir que cet ensemble de transformations forment un groupe d'opérations, qu'elles sont conformes, c'est-à-dire que ces transformations préservent des angles. Grâce à l'inversion géométrique, nous allons montrer que cette transformation géométrique applique des circonférences généralisées en circonférence généralisées, mais pas nécessairement des circonférences en circonférences ou des droites en droites, car celles-ci peuvent être échangés. Nous allons présenter l'inversion géométrique définie dans le plan, mais aussi une application pratique de tangente.

Mots-clés: transformation géométrique, inversion géométrique, tangente.

¹ Doutorando do IMUFRJ (Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro). E-mail: chavesrizo@gmail.com

² Docente do CAPUFRJ (Departamento de Desenho Geométrico do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro). E-mail:fatigalvao@yahoo.com.br

³ Docente do CAPUFRJ (Departamento de Desenho Geométrico do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro). E-mail:vaniamariarochagomes@gmail.com

1 Introdução

A disciplina de Desenho Geométrico, em particular os problemas de tangência, é a introdução basilar de um curso de Desenho. É notório que o estudo desta disciplina desperta certa coerência lógica, que induz ao raciocínio abstrato, o que é desejável em um desenvolvimento lógico. Sobre isto, cita Mafalda (2007):

[...] pela natureza do tema, temos em nossas mãos um conteúdo excepcional para desenvolver o hábito de se pensar com clareza, o mais difícil dos hábitos de se fixar, e para treinar a imaginação construtiva, a habilidade perceptiva que nos habilita a pensar em três dimensões, a visualizar rápido e precisamente, para construir uma imagem mental clara. (MAFALDA, 2007 apud FRENCH, 1976)

A disciplina Desenho Geométrico tem tido pouca relevância nos currículos das escolas, o que se reflete na maneira como os educadores lecionam a disciplina. Observem o que citam Coxeter e Greitzer (1967):

[...]. Talvez o status inferior da geometria no currículo escolar resulta de uma falta de familiaridade por parte dos educadores com a natureza da geometria e com os avanços que ocorreram no seu desenvolvimento. [...] (COXETER; GREITZER, 1967, p. xi, tradução nossa)⁴

Um dos objetivos deste artigo, além de apresentar uma solução a um determinado problema, e de usar ferramentas como a inversão geométrica, é, sobretudo, apresentar aos seus leitores a beleza e o raciocínio lógico por trás de um problema prático e, assim, mostrar a importância da disciplina Desenho Geométrico nos currículos escolares.

Assim, apresentaremos uma transformação geométrica do plano no plano, a saber, a inversão geométrica. Iremos usá-la para aplicar em um problema prático de tangência, ao solucionar com exatidão a localização de uma Artilharia de Campanha. Faremos um resumo sobre transformação geométrica, utilizando para isso basicamente dois livros de três autores: Coxeter e Greitzer (1967) e Ogilvy (1969). A revisão da literatura é apresentada na seção 2, em tópicos: iniciaremos fixando uma circunferência α de raio r e centro O , e com isso definiremos o inverso geométrico, em relação à α , de qualquer ponto diferente de O ; na sequência, apresentaremos a inversão para dois pontos distintos e para três pontos não colineares. Em seguida, faremos a comparação entre uma Inversão sobre uma circunferência e uma Reflexão

⁴ Perhaps the inferior status of geometry in the school curriculum stems from a lack of familiarity on the part of educators with the nature of geometry and with advances that have taken place in its development.

sobre uma reta; com isso veremos que há uma dualidade entre a Inversão I_α em relação a uma circunferência α e a Reflexão R_l em relação à reta l . Apresentaremos a inversão de circunferências ortogonais à circunferências de Inversão e mostraremos que a Inversão Geométrica é uma transformação conforme, ou seja, há preservação de ângulos. Na sequência, mostraremos a analogia entre a simetria da Reflexão e a Inversão para apresentar uma aplicação à Artilharia de campanha, com a “solução do comandante” e a construção da solução por Inversão Geométrica. Ao final, serão tecidas as considerações finais.

Este problema surge como um desafio apresentado pelo prof. Luis Carlos Guimarães⁵ e a solução recai sobre a resolução do “problema de Apolônio”. Tal problema consiste em determinar com precisão a localização de uma Bateria de Artilharia de Campanha inimiga, utilizando como tecnologia apenas régua, compasso, carta topográfica e relógio. A abordagem que escolhemos para resolver esse desafio foi por inversão geométrica. Há outras soluções, como podemos observar no trabalho de Leite e Chaves (LEITE, CHAVES, 2013, p. 8 e 9)⁶. Posteriormente, em uma conversa com o General de Artilharia Guido Amim Naves, ficamos curiosos em saber como atuaria um Grupo de Artilharia de Campanha caso não tivesse nenhuma tecnologia eletrônica para identificar a localização das Baterias inimigas. Nesta conversa, surgiu a ideia de publicarmos um artigo que explanasse este assunto, que julgamos ser de interesse direto dos militares da Arma de Artilharia e dos estudantes de Geometria. Além disso, a solução é de extrema beleza, resolvendo um problema de tangência.

2 Revisão da Literatura

Inversão Geométrica de um ponto

Seja α uma circunferência de raio r e centro O , dado $P \neq O$ com P pertencente ao plano de α e seja $\rho = \overline{OP}$. Definimos $P' = I_\alpha(P)$, o inverso geométrico de P em relação à α , como sendo o ponto sobre a semirreta \overline{OP} tal que $\overline{OP'} = r^2/\rho$. Observe que, se P pertence à α , então $P' \equiv P$, pois $\rho \rightarrow r$ logo, $\overline{OP'} \rightarrow r$, e que, se

⁵ Guimarães, L.C., prof^o do PEMAT/UFRJ – Programa de Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

⁶ Neste trabalho, apresentado no VI HTEM, os autores apresentam as soluções de François Viète (1540- 1603), Jean Victor Poncelet (1788-1867) e Julius Plucker (1801-1868).

$\overline{OP} > r$ então, $\overline{OP'} < r$, e reciprocamente. É de se observar, também, que se $P \rightarrow O$, ou seja, $\rho = \overline{OP} \rightarrow 0$ então, $P' \rightarrow \infty$, por esta razão dizemos que o ponto O corresponde ao ponto O_∞ sob inversão e portanto temos uma bijeção, ou seja, todos os pontos possuem correspondentes e é único. Veja Figura 1.

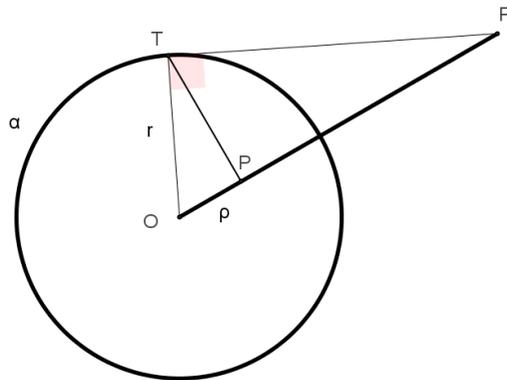


Figura 1 Inversão geométrica de um ponto⁷

A relação $\overline{OP'} = r^2 / \rho$ é fácil verificar pela relação métrica do triângulo retângulo

$\Delta OTP'$. Assim:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} \Rightarrow r^2 = \rho \cdot \overline{OP'} \Rightarrow \overline{OP'} = \frac{r^2}{\rho}$$

Inversão Geométrica de dois pontos não coincidentes

Ao propor a inversão de dois pontos não coincidentes, pretendemos apresentar ao leitor a inversão de uma reta, pois dois pontos distintos determinam uma única reta.

Veremos dois casos: quando a reta passa pelo centro de inversão O e quando a reta não passa por O , ou seja, quando os dois pontos arbitrários não coincidentes são colineares com o centro de inversão ou quando não são colineares com o centro de inversão.

Para fazer referência ao conjunto $l - \{O\}$ denominaremos a reta l de “reta furada” sempre que o centro de inversão O pertencer à reta l . Sem perda de generalidade, indicaremos a imagem de uma reta furada do mesmo modo que indicamos a imagem de uma reta qualquer, ou seja, $I_\alpha(l)$.

⁷ Todas as construções geométricas deste artigo foram realizadas pelos autores, com o Software de geometria dinâmica Geogebra.

Consideremos uma reta l que passa pelo centro O de uma circunferência α . Pela definição de inversão de um ponto vista anteriormente, I_α aplica a reta furada l nela mesma, o que podemos escrever como $I_\alpha(l) = l$. Ou seja, uma reta passando pelo ponto O é levada em si mesma. Desta forma, $I_\alpha(l)$ permuta os pontos de l interiores e exteriores a α permanecendo fixos os dois pontos onde l intersecta α .

Por outro lado, se uma reta l não passa pelo centro de inversão O de uma circunferência de inversão α , então a inversão de l conduz a uma circunferência que conterá o centro de inversão. Observe que a reciprocidade desta afirmação continua verdadeira, ou seja, se uma circunferência C passa pelo centro de inversão O de uma circunferência de inversão α , então a inversão de C conduz a uma reta. Na verdade é fácil observar tal fato, se o ponto O possui como inverso o ponto O_∞ , e a reta possui um único ponto no infinito, percebe-se que a circunferência que passa pelo ponto O será conduzida a uma reta, pois a reta contém o ponto O_∞ .

Inversão Geométrica de três pontos não colineares

Ao propor a inversão de três pontos não colineares, pretendemos apresentar ao leitor a inversão de uma circunferência, pois três pontos não colineares determinam uma única circunferência. Veremos dois casos: quando a circunferência passa pelo centro de inversão O (caso anterior, inverso da reta que não passa pelo centro de inversão) e quando a circunferência não passa por O .

Para fazer referência ao conjunto $C - \{O\}$ denominaremos a circunferência C de “circunferência furada” sempre que o centro de inversão O pertencer à circunferência C . Sem perda de generalidade, indicaremos a imagem de uma circunferência furada do mesmo modo que indicamos a imagem de uma circunferência qualquer, ou seja, $I_\alpha(C)$.

Vejamos o que acontece com uma circunferência C que passa pelo centro de inversão O de α ao ser invertida em relação à α .

Sejam B' um ponto arbitrário da circunferência C , A o ponto de interseção de l (reta definida pelos pontos A e B) com a reta perpendicular passando por O ($B = I_\alpha(B')$ e $A = I_\alpha(A')$), temos que $\sphericalangle OB'A' = \sphericalangle OAB = \frac{\pi}{2}$. Portanto, B' está na circunferência onde o segmento de reta OA' é o seu diâmetro. Observe a Figura 2.

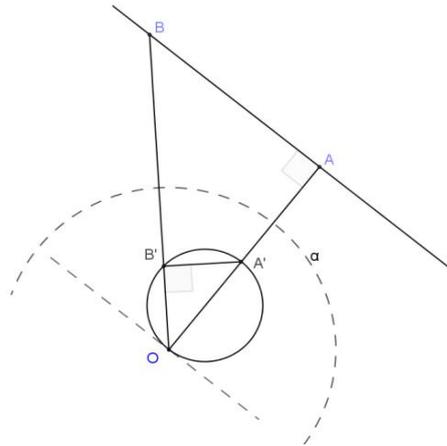


Figura 2 - Inversão de uma circunferência que passa pelo centro de inversão, ou por outro lado, inversão de uma reta que não passa pelo centro de inversão

Assim temos resumidamente:

- Se β é uma circunferência contendo o centro de inversão O da circunferência de inversão α , sua imagem será uma reta que não passa por O e é paralela à tangente por O a β .
- Reciprocamente: Se uma reta não passa pelo centro de inversão O da circunferência de inversão α , sua imagem será uma circunferência β que passa por O .

Podemos dizer que a inversão I_α conduz circunferências que passam pelo centro de inversão em retas que não passam pelo centro de inversão e reciprocamente.

Dada a importância deste fato para nossa aplicação prática, que faremos adiante, ratifico a observação: Note que o segmento OA' na Figura 2 contém o diâmetro da circunferência e, é perpendicular à reta l . Portanto, a reta tangente a esta circunferência em O é paralela à l .

Vejamos o caso de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.

Se uma circunferência β não passa pelo centro de uma circunferência de inversão α , então a inversão de β conduz a uma circunferência que não passa por O .

Sejam α uma circunferência de inversão de centro O e β outra circunferência que não passa pelo centro de inversão O de α , conforme a Figura 3. Consideremos os pontos A e B em β de modo que sejam os extremos de um diâmetro de β , e

colineares com o centro O . Assim, temos um ângulo reto em um ponto C de β ($C \neq A$ e $C \neq B$). Sejam A' , B' e C' as imagens de A , B e C respectivamente. Vimos acima que os ângulos $\angle O\hat{A}C$ e $\angle O\hat{C}'A'$ são congruentes, bem como os ângulos $\angle O\hat{B}C$ e $\angle O\hat{C}'B'$. Em seguida, considerando o triângulo ABC , observamos que o ângulo $\angle O\hat{A}C$ é igual à soma dos ângulos $\angle A\hat{C}B$ e $\angle C\hat{B}A$. Segue que $\angle A'C'B' = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, A' e B' são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência passando por C' .

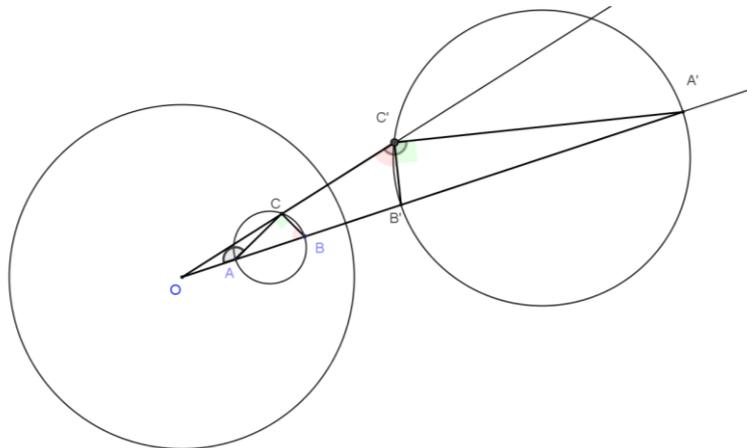


Figura 3 - Inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão

Em outras palavras temos:

- Se β é uma circunferência não contendo o centro de inversão O da circunferência de inversão α , sua imagem será uma circunferência β' que não passa pelo ponto O ; os centros de α e β são colineares com O .

É importante observar que os centros destas duas circunferências não são o inverso um do outro. Essa informação será útil quando da construção do problema prático adiante.

Dualidade entre Reflexão e Inversão

Há uma dualidade entre a inversão I_α em relação a uma circunferência α e a reflexão R_l em relação à reta l . Observe a Tabela 1 e a Figura 4 notando claramente a dualidade que ocorre entre as transformações.

Tabela 1 - Dualidade entre reflexão e inversão

<ul style="list-style-type: none"> • A reta l separa o plano em duas partes das quais são trocadas pelos pontos refletidos $Z' = R_l(Z)$; • Os pontos sobre a reta l permanecem fixos; • A aplicação $R_l(Z')$ é o próprio objeto, ou seja, $R_l(Z) \circ R_l(Z')$ é a aplicação identidade. 	<ul style="list-style-type: none"> • A circunferência de inversão separa o plano em duas partes das quais são trocadas pelos pontos invertidos $Z' = I_\alpha(Z)$; • Os pontos sobre a circunferência α permanecem fixos; • A aplicação $I_\alpha(Z')$ é o próprio objeto, ou seja, $I_\alpha(Z) \circ I_\alpha(Z')$ é a aplicação identidade.
--	--

Desta forma percebe-se que a reflexão, bem como veremos na inversão, são involuções, ou seja, $R_l(Z) = Z' \Leftrightarrow R_l(Z') = Z$ e $I_\alpha(Z) = Z' \Leftrightarrow I_\alpha(Z') = Z$. Portanto, uma aplicação bijetiva.

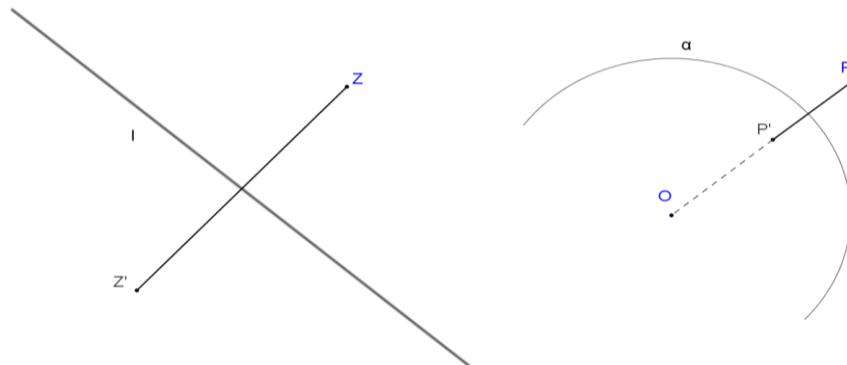


Figura 4 - Analogia entre reflexão R_l e inversão I_α

Assim, as inversões geométricas com respeito às circunferências podem ser entendidas como reflexões circulares, pois, com certas aproximações, elas representam a relação entre objeto e imagem por reflexão em um espelho circular.

Curiosidade da inversão geométrica: transformação conforme

Se a inversão em relação a uma circunferência com centro em O aplica dois pontos A e B (ambos diferentes de O e não coincidentes) em A' e B' respectivamente, então os triângulos AOB e $B'OA'$ são semelhantes, ou seja, há preservação de ângulos.

Seja α uma circunferência de centro O e raio r . Sejam A e B dois pontos distintos tais que A , B e O não sejam colineares, e sejam $A' = I_\alpha(A)$ e $B' = I_\alpha(B)$ suas respectivas imagens sob a inversão em relação à α . Da definição, sabemos que $d(O, A) \cdot d(O, A') = r^2 = d(O, B) \cdot d(O, B')$ e observando o ângulo comum $\sphericalangle A\hat{O}B = \sphericalangle B'\hat{O}A'$ obtemos: $d(O, A) \cdot d(O, A') = d(O, B) \cdot d(O, B') \Rightarrow \frac{d(O, A)}{d(O, B)} = \frac{d(O, B')}{d(O, A')}$, como pode ser observado na Figura 5.

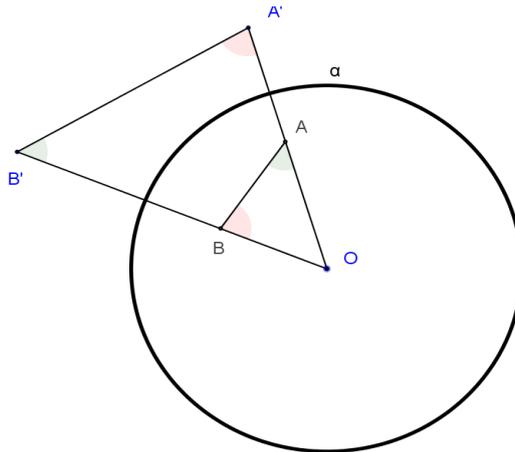


Figura 5 Triângulos semelhantes $\Delta AOB \approx \Delta B'OA'$

Distância entre imagens na inversão geométrica

Sejam A e B dois pontos arbitrários, distintos (Figura 5) e $A' = I_\alpha(A)$ e $B' = I_\alpha(B)$ suas respectivas imagens sob a inversão em relação à α . Então, a distância entre as imagens é dada por

$$d(A', B') = \left(\frac{r^2}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \right) \cdot d(A, B)$$

Usando os triângulos semelhantes $\Delta AOB \approx \Delta B'OA'$ temos

$$\frac{d(A', B')}{d(A, B)} = \frac{d(O, B')}{d(O, A)} = \frac{d(O, B') \cdot d(O, B)}{d(O, A) \cdot d(O, B)} = \left(\frac{r^2}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \right)$$

daí obtemos

$$d(A', B') = \left(\frac{r^2}{d(O, A) \cdot d(O, B)} \right) \cdot d(A, B)$$

Invertendo pontos por meio de circunferências ortogonais

Duas circunferências são ditas ortogonais se elas se intersectam formando ângulos retos, ou seja, se seus raios são perpendiculares no ponto de intersecção.

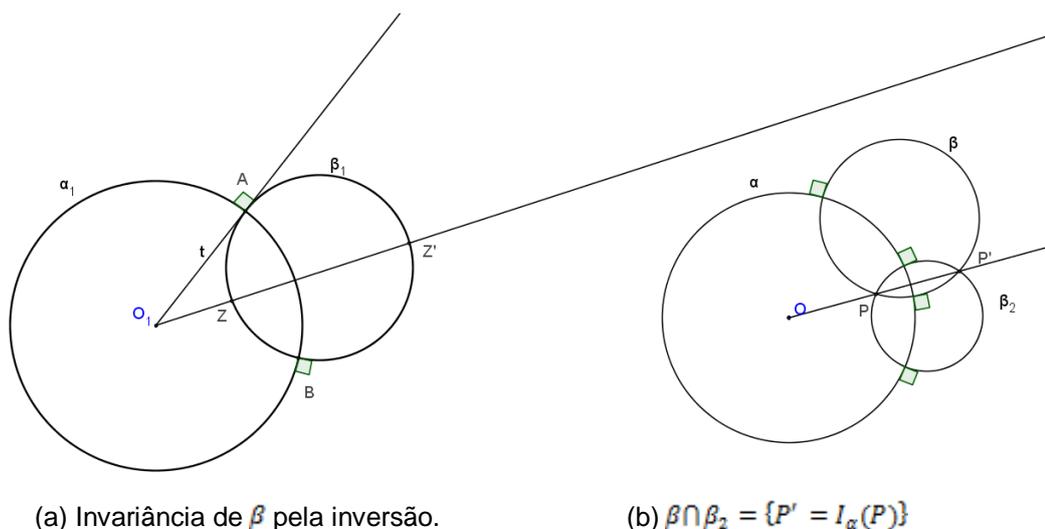
Faremos a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência fixada $\alpha(\alpha_1)$. A inversão de uma circunferência β_1 ortogonal a α_1 , em relação a α_1 , é a própria circunferência β_1 . É de fácil verificação que circunferências ortogonais não contêm o centro de inversão, caso contrário, sua inversão seria uma reta.

Considere uma circunferência α_1 , de centro O e raio r , e uma circunferência β_1 intersectando α_1 perpendicularmente nos pontos A e B , isto é, a reta t tangente a β_1 em A , por exemplo, passa por O (ver Figura 6a). Sabemos que os pontos A e B permanecem fixos quando invertidos em relação a α_1 . Considere um ponto Z , em β_1 , e a semirreta passando por O e Z . Esta semirreta intersectará β_1 em um ponto Z' . De acordo com o valor da potência de O_1 com relação à circunferência β_1 , temos:

$$d(O_1, Z) \cdot d(O_1, Z') = d(O_1, B)^2 = r^2 = d(O_1, A)^2.$$

O que caracteriza Z' como sendo o inverso de Z em relação a α_1 . Mas, existe apenas uma circunferência passando por A , B e Z' , a própria β_1 , de onde segue o resultado.

A Figura 6a ilustra duas consequências imediatas deste resultado. A primeira é que o disco delimitado por β_1 é aplicado em si mesmo, ou seja, $I_{\alpha_1}(\beta_1) = \beta_1$, e a segunda é que a reta passando por O_1 e pelo ponto Z de β_1 , intersecta β_1 pela segunda vez no ponto de inversão Z' .



(a) Invariância de β pela inversão.

(b) $\beta \cap \beta_2 = \{P' = I_{\alpha}(P)\}$

Figura 6 - Circunferências ortogonais à circunferência de Inversão

Outra consequência possível é a construção geométrica mostrada na Figura 6b. A imagem P' de P sob a inversão em relação à α é o segundo ponto de intersecção de quaisquer duas circunferências que passam por P e que são ortogonais à α .

Vejam. Dado um $Z \neq O$, basta tomar duas circunferências ortogonais β e β_2 à α contendo P . Assim, P' deve pertencer à β e à β_2 , pois ambas são invariantes.

Preservação de ângulos

Mostraremos que a inversão geométrica preserva ângulos, ou seja, é uma transformação conforme. O que nos permitiu verificar anteriormente a semelhança de triângulos.

Sejam β_1 e β_2 duas circunferências que se intersectam em um ponto P . Definimos o ângulo entre β_1 e β_2 em P como sendo o ângulo agudo θ de t_1 para t_2 , neste sentido, onde t_1 e t_2 são as retas tangentes às circunferências β_1 e β_2 em P , respectivamente.

Analogamente, se $l \equiv t_2$ é uma reta que intersecta β_1 em P , o ângulo entre l e β_1 é o ângulo agudo θ de l para t_1 , neste sentido.

Seja α uma circunferência de inversão e, β_1 e β_2 circunferências ortogonais à α . Dado $\{P, P'\} = \beta_1 \cap \beta_2$ e sejam t_1 e t_2 as tangentes à β_1 e β_2 , em P , formando ângulo agudo θ . Então, o ângulo agudo entre as tangentes à β_1 e β_2 em P' também é θ .

Vejam. Sendo t_i e t'_i , com $i \in \mathbb{N}^*$, as tangentes à β_i em P e P' , respectivamente, mostramos anteriormente que estas duas retas formam ângulos congruentes com a semirreta de origem O passando por P . Por fim, basta comparar estes ângulos com o ângulo θ . (ver Figura 7).

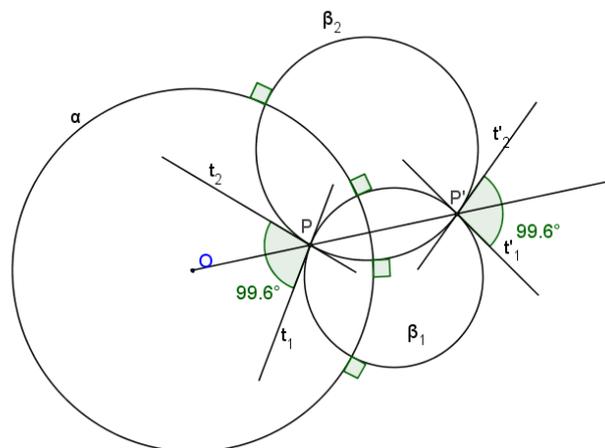
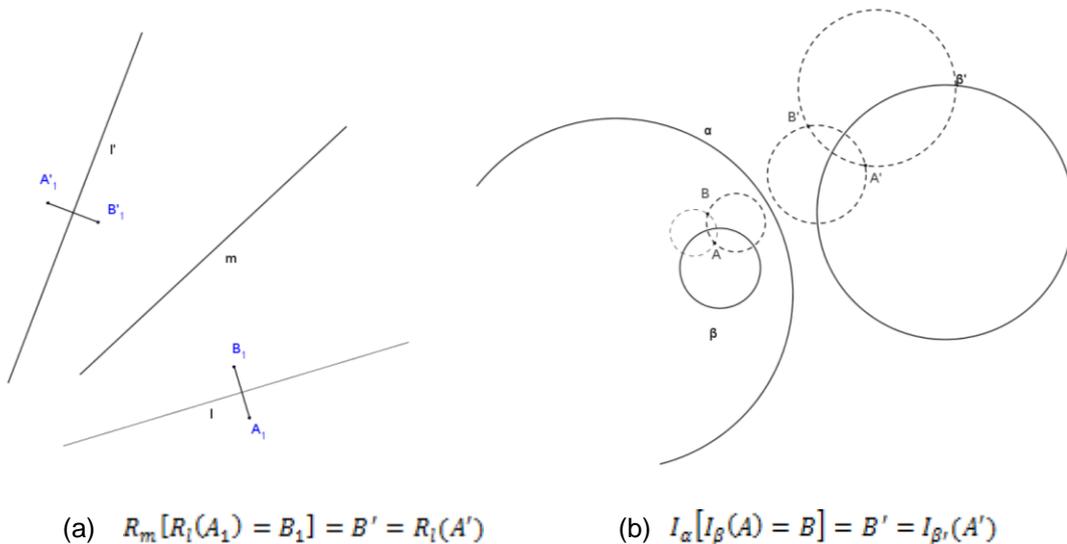


Figura 7 – Transformação conforme

Propriedades análogas de pontos simétricos na Reflexão e na Inversão

Na Figura 8a, os pontos A_1 e B_1 são simétricos em relação à reta l . Fazendo uma reflexão em relação à reta m , obtemos os pontos A'_1 e B'_1 bem como uma reta r . Assim, pode-se provar, por meio de congruência, que A'_1 e B'_1 são simétricos em relação à r . Ou seja, pontos simétricos em relação a uma reta l são refletidos por uma reta m em pontos simétricos em relação à reflexão de l .



$$(a) R_m[R_l(A_1) = B_1] = B' = R_l(A')$$

$$(b) I_\alpha[I_\beta(A) = B] = B' = I_{\beta'}(A')$$

Figura 8 - Propriedades análogas de pontos simétricos para R_m e I_α

Mostremos agora que a inversão de uma circunferência em relação a uma circunferência também possui propriedade similar.

Sejam α e β duas circunferências. Dados A e $B = I_\beta(A)$, sejam $A' = I_\alpha(A)$ e $B' = I_\alpha(B)$. Então $B' = I_{\beta'}(A')$, onde $\beta' = I_\alpha(\beta)$. Este resultado é uma consequência da afirmação acima anterior (Fig 8b) e da seguinte.

A inversão aplica um par de circunferências ortogonais em um par de circunferências ortogonais.

Para uma melhor análise iremos separar tais demonstrações em casos distintos. Fixemos α como sendo a circunferência de inversão, com centro de inversão em O .

- Suponhamos que duas circunferências ortogonais (entre si) quaisquer β_1 e β_2 não passem pelo centro de inversão O . Dadas as tangentes t_1 e t_2 a estas duas circunferências formando um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, construímos duas circunferências γ_1 e γ_2 , ambas ortogonais à α , tendo t_1 e t_2 como suas

tangentes em P . Conforme visto anteriormente, o ângulo entre as tangentes t'_1 e t'_2 a γ_1 e γ_2 em P' também é θ .

- Suponhamos que duas circunferências ortogonais β_1 e β_2 passem pelo centro de inversão O . Já sabemos, portanto que seus simétricos são retas concorrentes em P' . O resultado segue de modo análogo ao caso anterior, apenas observando que estas duas retas são na verdade as tangentes t'_1 e t'_2 .
- Suponhamos que β_1 passe pelo centro de inversão, mas não β_2 . Neste caso a demonstração é análoga ao caso onde as duas passam pelo centro de inversão.

Observando a Figura 8b, podemos melhor entendê-la agora. Temos que as circunferências tracejadas passando por A e B são ortogonais à β e que suas respectivas imagens pela inversão em relação à α são ortogonais à β' . Portanto, se intersectam em um par de pontos inversos em relação à β' .

Isto resulta em outra propriedade: se duas curvas se intersectam em um ponto P e fazem um ângulo φ entre elas, seus inversos também farão um ângulo φ no ponto P' (inverso de P). Pois, a inversão é uma transformação conforme, ou seja, ângulos são invariantes nesta aplicação.

3 Aplicação à Artilharia de campanha

Nas grandes guerras mundiais do sec. XX⁸, houve um avanço no alcance de tiro. Com a capacidade de realizar bombardeios indiretos com alcances cada vez maiores, era possível realizá-los de posições profundas da retaguarda, o que dificultava a localização da origem de tais disparos. Na Primeira Guerra Mundial são realizados bombardeamentos a distâncias superiores a 20 km. Segundo Meretskov (2014) um exemplo [...] foi o “Canhão de Paris”, que [...] podia alcançar até 132 km de distância.

O canhão de longo alcance adquiriu durante a Primeira Guerra Mundial maior alcance e precisão. Foi utilizado massivamente pela primeira vez na história na 1ª guerra mundial. Destacou-se o modelo alemão “Grande Bertha”, capaz de bombardear o alvo a mais de 120 quilômetros de distância, com o qual os alemães bombardearam Paris.

A artilharia de campanha surge realmente no século XVIII, quando a combinação de mobilidade e poder de fogo tirou o caráter defensivo e possibilitou à artilharia um novo papel nos campos de batalha. Antes semi-estática e direcionada principalmente a muralhas, agora a

⁸ 1ª GGM 1914-1918 e 2ª GGM 1939-1945

artilharia ganha a tarefa de também disparar contra a infantaria e a cavalaria inimigas, e depois mesmo contra a artilharia inimiga em um tipo de operação chamado de contrabateria [...].(WEIR, 2006)

A contrabateria é exatamente o exemplo prático que introduziu o nosso problema.

Surge então o obus [...] que tem como característica o tiro curvo [...] mas com inclinação do tubo menor [...] permitindo maior alcance. A artilharia de campanha na Europa organiza-se em companhias [...] sendo as posições de tiro chamadas de baterias. (WEIR, 2006)

Graças ao controle do retrocesso e a melhora da carga de propulsão, realizavam-se bombardeios de artilharia a distâncias superiores a 20 km, como dito acima, o que permitia realizar tiros indiretos. Assim, quando o comandante de uma Bateria de Artilharia recebe uma ordem para realizar uma contrabateria a um Grupo de Artilharia inimiga, em função do alcance, não tem como determinar a região onde está posicionada a Bateria inimiga. O comandante, com a tecnologia que possui - cartas topográficas da região, relógio, compasso e régua, faz o seguinte esboço:

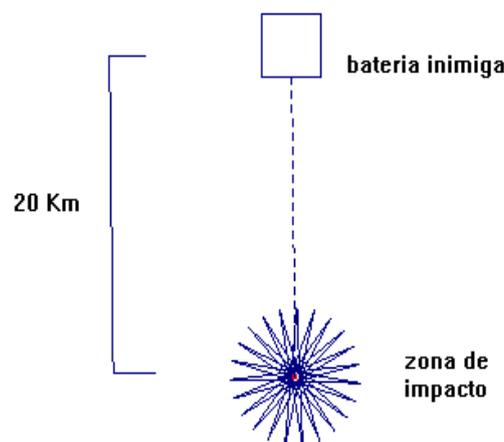


Figura 9 - Vista superior

Observe que a bateria inimiga localiza-se em um raio de 20 Km, mas desconhece-se o ponto exato.

A solução engenhosa do comandante

Ele resolve destacar três homens (Sd_1, Sd_2 e Sd_3) em direções distintas. Cada qual com um relógio sincronizado entre si. Após o 1º disparo da artilharia inimiga, os três homens identificam o momento no qual ouviram o som. Assim, digamos que o Sd_1 tenha percebido o som às 08:00:00 hs, o Sd_2 às 08:00:10 hs e o Sd_3 às 08:00:20 hs.

O comandante de posse destas informações e considerando a velocidade do som na CNTP⁹ de aprox. 340 m/s , e considerando os seguintes dados:

- Sd_1 : Circunferência $(O_1, 0\text{m})$;
- Sd_2 : Circunferência $(O_2, 3400\text{m})$;
- Sd_3 : Circunferência $(O_3, 6800\text{m})$.

Então ele observa que a artilharia inimiga está disposta em uma região cujo centro é o centro de um círculo que é tangente aos três homens (Sd_1, Sd_2 e Sd_3) e

Sd_3), que foram destacados. De posse das novas informações faz o seguinte esboço:

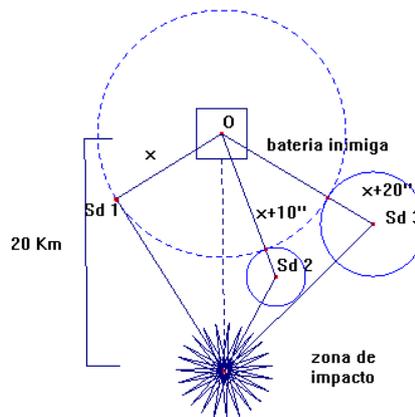


Figura 10 - Posicionamento no terreno

O curioso é que a solução deste problema tem início há mais de 2000 anos no livro IV da obra *Elementos de Euclides* de Alexandria (c.300 a.E.C.). Nele, o autor demonstra a construção de uma circunferência que passa por três pontos, bem como, a construção de uma circunferência tangente a três retas. Hoje sabemos que tais construções são sempre possíveis, pois tratam-se de determinar o circuncentro e o incentro dos triângulos respectivamente. Posteriormente, Apolônio de Perga (262 a.E.C. – 190 a.E.C.) generalizou este problema para a construção de circunferências tangentes a combinações formadas por pontos, retas e circunferências. O enunciado do problema generalizado por Apolônio pode ser assim resumido, como vemos em

⁹ Condições Normais de Temperatura e Pressão

Mafalda (2007): “Dados três entes geométricos, cada uma das quais podendo ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que é tangente a cada uma dos três entes” (MAFALDA, 2007, p. 3), dando assim origem aos dez casos $\binom{p}{n+p-1}$ do problema, onde o 10º problema é o notório “problema de Apolônio”.

Observe que o lugar geométrico do plano centro das circunferências tangentes externas a outras três circunferências é a intersecção de duas hipérbolas. A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a duas circunferências. Mas não é possível construir essa curva com régua e compasso. E o nosso desafio é restrito a construção com régua e compasso. Assim, observa-se claramente o potencial da Inversão Geométrica, embora haja outras formas de resolução, como as brilhantes soluções de Viète e Poncelet, é inegável a simplicidade e beleza desta solução por inversão geométrica.

Construção por Inversão Geométrica

Sejam três circunferências $Sd_1(O_1, r_1), Sd_2(O_2, r_2)$ e $Sd_3(O_3, r_3)$ com $r_1 < r_2 < r_3$.

Acrescentamos aos raios das três circunferências um Δ tal que $Sd_1(O_1, r_1 + \Delta), Sd_2(O_2, r_2 + \Delta)$ e $Sd_3(O_3, r_3 + \Delta)$ e

$Sd_2(O_2, r_2 + \Delta) \cap Sd_3(O_3, r_3 + \Delta) = \{E\}$ por E construímos o círculo de inversão k , o

objetivo de que as duas circunferências sejam tangentes em E é pela razão que vimos

acima, quando do estudo sobre inversão, elas serão conduzidas às retas paralelas.

Tal que:

$$I_k(Sd_1) \rightarrow t_1; I_k(Sd_2) \rightarrow t_2; I_k(Sd_3) \rightarrow t_3$$

Construímos a reta t equidistante de t_2 e t_3 . Obtemos o ponto O' centro da circunferência $L'(O', m)$ tangente à t_1, t_2 e t_3 .

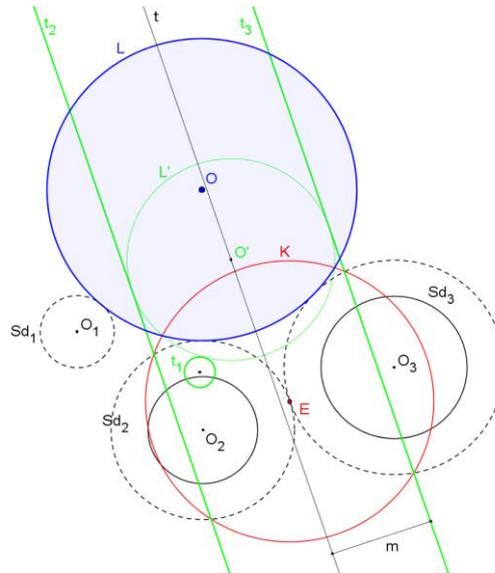


Figura 11 – Construção da tangente às três circunferências no plano por Inversão Geométrica

A obtenção de O' é simples, pois é tangente à t_1 e t_2 e, portanto está localizada em uma reta equidistante, ou seja, uma reta paralela às duas retas e que passe pelo ponto médio. Daí é fácil perceber que a circunferência possui raio de medida igual à distância às retas. Em seguida, essa mesma distância nos serve para determinar o ponto O' sobre a reta, pois é à distância até t_3 . Assim, o ponto O' fica determinado.

Agora, invertamos L' e obtemos L , ou seja, $I_k(L') \rightarrow L$. Circunferência cujo centro O é o ponto procurado.

Observe que L é tangente aos círculos pontilhados, mas o ponto O é invariante a menos do raio. Por um processo simples determinamos o centro da circunferência L .

4 Considerações finais

Embora a inversão em um círculo modifique acentuadamente a aparência de figuras geométricas, é um fato notável que as novas figuras continuem a ter muitas propriedades características das antigas. Trata-se das propriedades inalteráveis ou invariantes sob esta transformação. Como vimos, a inversão transforma círculos e retas em círculos e retas. Mas, de grande importância é que o ângulo entre duas curvas é invariante sob a inversão. Isto significa que quaisquer duas curvas que se cortam são transformadas por inversão em outras duas curvas que ainda se cortam sob o mesmo ângulo e neste mesmo ponto de intersecção. Contudo, deve-se observar que embora a inversão preserve a grandeza dos ângulos, ela inverte seus sentidos. Outra propriedade interessante é a que transforma circunferências tangentes no centro

de inversão em retas paralelas. Esta propriedade em particular, de fácil entendimento, pois o centro de inversão é conduzido ao infinito por inversão, é que nos permite transformar o problema de Apolônio de tangência a três circunferências em um problema de tangência a duas retas paralelas e uma circunferência - uma forma mais simples de abordagem. Desta forma, resolvemos o problema de tangência que propomos neste artigo, qual seja: determinar o centro da circunferência tangente a três outras circunferências dadas no plano.

A relevância dos métodos de resolução de problemas de tangência e sua aplicabilidade podem ser verificadas atualmente, por exemplo, na construção de Diagrama de Vonoroi¹⁰ para conjuntos de circunferências.

Mais do que apresentar um método de resolver problemas de tangência, o objetivo deste artigo é mostrar o potencial do Desenho Geométrico para estudos de problemas práticos. O método proposto e o problema resolvido mostram que a prática do Desenho Geométrico fomenta o raciocínio lógico-dedutivo, o que conduz à descoberta de novos conhecimentos. A demonstração e a solução do problema deste artigo reforça a ideia de que o estudo do Desenho Geométrico deve ser baseado em demonstrações. Esse exercício tem efeito benéfico na formação do estudante, pois cria uma cultura de aprendizagem com mais autonomia na demonstração de fatos e construção de argumentos. Espera-se com isto, contribuir para a valorização do Desenho Geométrico, bem como motivar outros estudos sobre o tema.

Referências

COXETER, H. S. M; GREITZER, S.L. Geometry revisited. Ed. The mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

LEITE, D.G; CHAVES, J.A. As soluções do 10º problema de Apolônio por Viète, Poncelet e Plucker. VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM) 15-19 de julho de 2013, UFSCar, São Carlos, SP, Brasil.

MACKENSEN, A.V. O desenvolvimento da Artilharia na Idade Moderna.
<<http://www.clubedogenerais.org/site/artigos/107/2014/06/o-desenvolvimento-da-artilharia-na-idade-moderna/>>. Acesso em 15 abr 2016.

MERETSKOV, K. A evolução da Artilharia.
<<http://www.clubedogenerais.org/site/artigos/96/2014/06/a-evolucao-da-artilharia/>>. Acesso em: 17 abr 2016.

¹⁰ Esses diagramas têm aplicações, por exemplo, em problemas de caminhos mais curtos e empacotamento de cabos. Esse assunto pode-se ver em Mafalda (2007).

MORGADO A.C; WAGNER, E. Geometria II: métrica plana. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora s.a., 1974.

MAFALDA, R. Tese de doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007.

OGILVY,C.S. Excursions in geometry. New York: Oxford University Press, 1969.

WEIR, W. 50 Batalhas Que Mudaram o Mundo: Os Conflitos Que Mais Influenciaram o Curso da História. 3 ed. São Paulo: M. Books, 2006.