

REPRESENTAÇÃO DE UM TETRAEDRO REGULAR COM UMA FACE HORIZONTAL

Constantino Rodrigues¹

Resumo: O presente artigo aborda o poliedro platónico referido, no que respeita, mais particularmente, à determinação das suas projeções diédricas ortogonais. Uma vez contextualizado este tema nuclear, procede-se à caracterização sumária do tetraedro regular e ao seu estudo propriamente dito. Nessa análise, considera-se uma face horizontal, explorando as variantes e os problemas que daí decorrem: a mesma apresenta, assim, vários momentos, nos quais têm ênfase as construções que pressupõem desconhecer o lugar geométrico da projeção horizontal do vértice exterior à face de nível e, ainda, as variantes que não projetam diretamente a verdadeira grandeza de arestas e/ou a altura de faces, no plano frontal de projeção. As distintas metodologias adotadas ao longo do estudo permitem ratificar o objetivo traçado de demonstrar a possibilidade de edificar a construção do tetraedro regular partindo do caso geral da face preambular, desconhecendo-se simultaneamente, *a priori*, as projeções das arestas e do vértice exteriores à face em questão.

Palavras-chave: Tetraedro regular, Geometria Descritiva, Representação.

Abstract: This article focuses on the aforementioned platonic polyhedron, placing particular emphasis on the determination of its orthogonal dihedral projections. Following the contextualization of the theme, the subsequent development includes a brief characterisation of the regular tetrahedron and the study itself. Considering a horizontal face of the polyhedron, this paper explores the variants and problems that arise from it. It is therefore structured in different moments and emphasises not only constructions that presuppose ignorance of the locus of the horizontal projection of the vertex outside the preambular face but also the variants which do not directly project true length of the edges and/or altitude of the faces in the frontal projection plane. Different methodologies are used in order to demonstrate that it is possible to construct a regular tetrahedron from the general case of the preambular face when *a priori* the projections of both its edges and the vertex outside this face are unknown.

Keywords: Regular Tetrahedron, Descriptive Geometry, Representation.

¹ Universidade de Lisboa, Faculdade de Belas-Artes, Centro de Investigação e Estudos em Belas-Artes (CIEBA), Lisboa, Portugal, e Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, ECATI, Lisboa, Portugal. constantino.rodrigues@gmail.com

1 Introdução

O *tetraedro regular* assume particular importância na Geometria Descritiva pelas suas propriedades. Fazendo parte dos cinco poliedros regulares convexos, ou de Platão, é o mais simples a nível formal, não sendo, no entanto, o mais simples quanto à compreensão – que fica na incumbência do *hexaedro regular* ou *cubo*. Os níveis de complexidade destes sólidos implicam a sua integração nos currículos académicos Superiores e não Superiores – como ocorre em Portugal –, verificando-se, no que respeita à representação do tetraedro regular, que a mesma decorre a partir de três paradigmas instituídos – de modo consciente ou não. Enunciemo-los concretamente: i) a face inicial é horizontal ou frontal; ii) a representação edifica-se a partir de direções particulares de uma das arestas da face inicial; iii) é conhecida a projeção do vértice exterior a essa face, no plano dessa face ou no plano de projeção paralelo à face.

Entendemos ser necessário ultrapassar os paradigmas ii) e iii), ou seja, que as direções das arestas iniciais do tetraedro regular devem ser umas quaisquer, e que deve ser desconhecida a projeção do vértice exterior à face preambular. Deste modo, a representação seguirá o seu percurso natural, o mesmo é dizer, do geral para o particular, não contendo, simultaneamente, indícios relativos a algo que não se atingiu previamente através da compreensão – referimo-nos a uma das projeções do vértice. Nesse paradigma, poderá declarar-se estarmos perante um Problema que temos de compreender e solucionar.

Assim, dirigiremos doravante o nosso discurso respeitando as conceções enunciadas. O desenvolvimento da reflexão terá em consideração a caracterização sumária do poliedro platónico e o seu estudo propriamente dito, estruturando-se da seguinte forma:

- a) Representação da face horizontal;
- b) Observação e registo das variantes admitidas para a face horizontal;
- c) Determinação e indução da posição da projeção horizontal do vértice omissão à face horizontal;
- d) Justificação quanto ao posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face de nível;
- e) Determinação, nas distintas variantes admitidas para a face horizontal, da altura do poliedro segundo alguns métodos e conceções admitidas;
- f) Compreensão da implicação das direções das arestas da face horizontal para determinação da sua altura;
- g) Observação e análise da projeção frontal do poliedro.

O artigo estabelece os seguintes objetivos gerais:

- i) Promover a descoberta;
- ii) Acionar a intuição, indução e dedução;
- iii) Desenvolver a imaginação espacial e o rigor mental.

Os objetivos específicos, no que respeita, em particular, ao tetraedro regular, são os seguintes:

- i) Caracterizar, sinteticamente, as suas propriedades;
- ii) Identificar e caracterizar as variantes admitidas para a face horizontal;
- iii) Identificar e justificar o posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal;
- iv) Representar o tetraedro regular nos distintos casos admitidos para a face horizontal – com enfoque na variante geral –, recorrendo a conceções distintas e diferentes métodos geométricos auxiliares;
- v) Perceber a implicação das direções das arestas horizontais para a consecução da altura;
- vi) Identificar os elementos que auxiliam e potenciam a representação em *épura*;
- vii) Enriquecer o conhecimento atinente à representação em *épura* do poliedro platónico.

2 Revisão de literatura

A representação do tetraedro regular a partir de uma face horizontal é comum entre a maioria dos autores que tratam os poliedros de Platão. Nesta, o problema não se coloca na representação da face preambular – apesar de facilmente ultrapassável em orientações arbitrárias: manifesta-se antes na determinação da altura do poliedro.

As direções das arestas horizontais têm, contudo, implicações na complexidade associada à determinação do vértice exterior à face inicial, sendo necessário optar ou pelo caso geral ou pelo particular.

A revisão de literatura desenvolvida permite observar que a maioria dos autores, nos seus estudos, atribui direções arbitrárias às arestas horizontais, o mesmo é dizer que representam a face de nível segundo o caso geral. Disso são exemplos Angel Fernández (1944, p. 204), Álvaro Rodrigues (1968, p. 258), Francisco Abajo (1992, p. 171) e Fernando Asensi (2000, p. 70).

Dante Nannoni (1997, p. 469), contrariamente, opta por direccionar uma das arestas horizontais perpendicularmente ao plano frontal de projeção. Essa decisão

leva a que uma das outras arestas seja frontal e projete, conseqüentemente, a sua verdadeira grandeza no plano frontal de projeção. Embora João Xavier e José Rebelo – autores do Programa de Geometria Descritiva A, homologado em 2001, Portugal – não expressem diretamente a mesma opinião de Nannoni, concluímos que caminham nesse sentido, na medida em que situam o estudo do tetraedro regular antes da abordagem dos Métodos Geométricos Auxiliares (2001, p. 24): por conseguinte, a determinação da altura do poliedro fica condicionada pela representação em verdadeira grandeza de uma das arestas não horizontais – a menos que se conceptualizem metodologias mais ‘avançadas’ como, por exemplo, a inscrição do poliedro numa superfície cônica de revolução circular, o que consideramos prematuro, didaticamente falando.

Destacamos, por último, Luís Gonçalves (1981, p. 25), que direciona uma das arestas horizontais paralelamente ao eixo x (linha de terra), pelo que não representa a face preambular segundo o caso geral nem na posição selecionada por Nannoni. Neste exemplo, Gonçalves não obtém qualquer benefício gráfico para a determinação do vértice omisso – a menos que recorresse à projeção no plano lateral π_0 –, embora se registre harmonia nas projeções, por comparação com os casos anteriores. Na continuidade, Gonçalves (1981, p. 27), opta pela sugestão de Nannoni sem que, no entanto, retire qualquer vantagem, como perceberemos seguidamente.

A revisão que encetamos regista o facto de todos autores levarem a cabo a construção do tetraedro regular conhecendo e declarando, *a priori*, a posição da projeção horizontal do vértice exterior à face preambular, e condicionando a representação do poliedro a partir desse dado. Assinala, ainda, a curiosidade de Angel Taibo Fernández ser o único dos autores mencionados a justificar espacialmente a posição da projeção horizontal do vértice omisso, e o único também a rebater uma das faces do poliedro – recorrendo ao método do triângulo de rebatimento –, enquanto os restantes autores rebatem o triângulo retângulo determinado pela altura vertical do sólido e por uma das arestas, triângulo esse contido, pois, num plano projetante horizontal. Tal declaração implica que Nannoni e Gonçalves (p.27) tenham seguido o mesmo princípio, ou seja, que se tenham auxiliado de um rebatimento, o que é manifestamente inconsequente e excessivo perante a constatação de que uma das arestas não horizontais se projeta em verdadeira grandeza no plano frontal de projeção.

Esta revisão permite, ainda, verificar que os autores não identificam as operações com notações próprias e que Asensi é o único a considerar a consecução da altura do

tetraedro através do rebatimento de um triângulo retângulo determinado pela altura vertical do poliedro e pela altura de uma das faces.

Terminamos explicitando o objetivo traçado de demonstrar e justificar a possibilidade de construir a épura de um tetraedro regular com arestas horizontais de direções arbitrárias desconhecendo a posição da projeção horizontal do vértice exterior a essa face, excluindo-nos, desse modo, daquilo que parece ser uma necessidade inevitável.

3 Caracterização, sumária, das propriedades do Tetraedro regular

Expõem-se, seguidamente, as principais propriedades do *tetraedro regular*. Atente-se, pois, ao Quadro 1.

Quadro 1 - Principais propriedades do Tetraedro regular

Designação	• Tetraedro regular
Tipologia	• Poliedro Piramidal, variante triangular
Grupo	• Poliedros de Platão, platónicos ou regulares
Elemento da Natureza	• Associado ao <i>Fogo</i> na Grécia Clássica
Faces (F): Quantidade	• 4
Vértices (V): Quantidade	• 4
Arestas (A): Quantidade	• 6
Teorema de Euler	• Respeita o teorema, nomeadamente, $F + V = A + 2$
Classificação das faces	• Triângulos regulares (equiláteros ou equiângulos)
Convexidade vs. Concavidade	• Convexo
Inscrição na superfície esférica	• Sim
Circunscrição à superfície esférica	• Sim
Raio	• Valor do raio da superfície esférica circunscrita
Apótema	• Valor do raio da superfície esférica inscrita
Centro	• Centro comum às superfícies esféricas inscrita e circunscrita • Intersecção das ' <i>quatro</i> ' alturas, ou seja, os quatro eixos de simetria de ordem ternária.
Dual	• Tetraedro
Planos de simetria: Quantidade	• 6 Observação: O plano de simetria do tetraedro regular contém uma aresta e o ponto médio de outra. Contém, ainda, duas medianas de faces distintas.
Amplitude angular entre arestas adjacentes	• 60°
Amplitude angular entre arestas e faces	• 54,73561032°
Retilíneo do diedro (amplitude angular entre faces)	• 70,52877937°
Planificação	• Planificável

Convergência de arestas	<ul style="list-style-type: none"> Em cada vértice convergem a mesma quantidade de arestas: 3 arestas
Eixos de simetria de ordem ternária: Quantidade	<ul style="list-style-type: none"> 4
Eixos de simetria de ordem binária: Quantidade	<ul style="list-style-type: none"> 3
Secções: Figuras bidimensionais admitidas	<ul style="list-style-type: none"> Triângulos
	<ul style="list-style-type: none"> Quadriláteros

3.1 Elementos do tetraedro regular

Apresenta-se, neste momento, a representação esquemática axonométrica de um tetraedro regular, Figuras 1, 2 e 3, acompanhadas das respectivas legendas, Quadros 2 e 3, nas quais se identificam alguns elementos pertencentes ao poliedro.

Quadro 2 - Legenda da Figura 1.

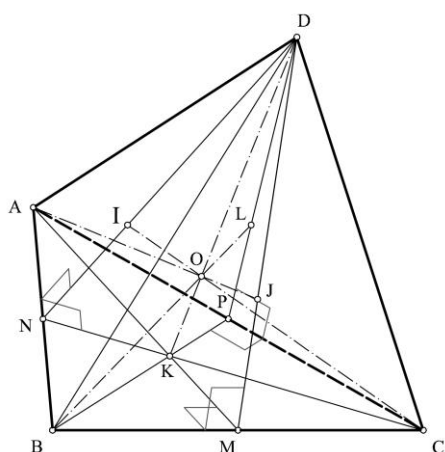


Figura 1 -

Representação axonométrica do tetraedro regular

A	<ul style="list-style-type: none"> Vértice, tal como B, C e D
[AB]	<ul style="list-style-type: none"> Aresta, tal como [BC], [CA], [AD], [BD] e [CD]
[ABC]	<ul style="list-style-type: none"> Face, tal como [ABD], [BCD] e [CAD]
N	<ul style="list-style-type: none"> Ponto médio da aresta [AB]
M	<ul style="list-style-type: none"> Ponto médio da aresta [BC]
P	<ul style="list-style-type: none"> Ponto médio da aresta [CA]
[AM]	<ul style="list-style-type: none"> Mediana da face [ABC]
	<ul style="list-style-type: none"> Altura da face [ABC]
	<ul style="list-style-type: none"> Bissetriz do ângulo BAC Mediatriz de [BC]
[BP]	<ul style="list-style-type: none"> Mediana da face [ABC]
	<ul style="list-style-type: none"> Altura da face [ABC]
	<ul style="list-style-type: none"> Bissetriz do ângulo ABC Mediatriz de [CA]
[CN]	<ul style="list-style-type: none"> Mediana da face [ABC]
	<ul style="list-style-type: none"> Altura da face [ABC]
	<ul style="list-style-type: none"> Bissetriz do ângulo ACB Mediatriz de [AB]
[ND]	<ul style="list-style-type: none"> Mediana da face [ABD]
	<ul style="list-style-type: none"> Altura da face [ABD]
	<ul style="list-style-type: none"> Bissetriz do ângulo ADB Mediatriz de [AB]
[MD]	<ul style="list-style-type: none"> Mediana da face [BCD]
	<ul style="list-style-type: none"> Altura da face [BCD]
	<ul style="list-style-type: none"> Bissetriz do ângulo BDC Mediatriz de [BC]
[PD]	<ul style="list-style-type: none"> Mediana da face [CAD]
	<ul style="list-style-type: none"> Altura da face [CAD]
	<ul style="list-style-type: none"> Bissetriz do ângulo CDA Mediatriz de [CA]

Quadro 3 - Legenda das Figuras 1, 2 e 3.

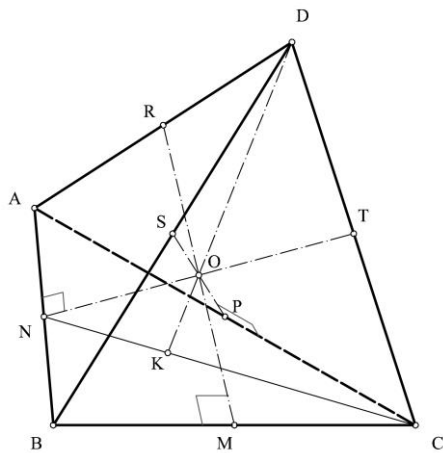


Figura 2 -

Representação axonométrica do tetraedro regular

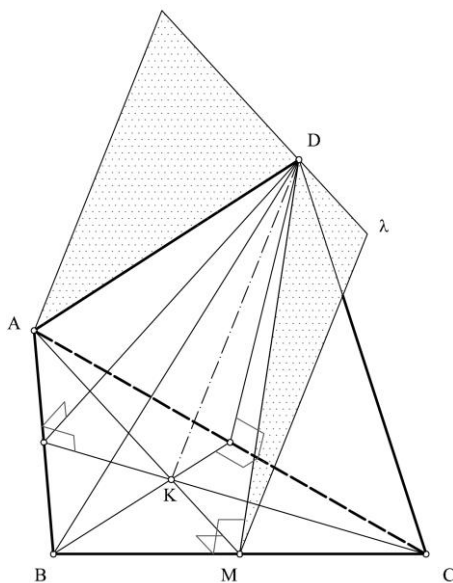


Figura 3 -

Representação axonométrica

K	<ul style="list-style-type: none"> • Centro da face [ABC] ⁽¹⁾ ⁽¹⁾ Baricentro, Ortocentro, Circuncentro e Incentro
I	<ul style="list-style-type: none"> • Centro da face [ABD] ⁽²⁾ ⁽²⁾ Baricentro, Ortocentro, Circuncentro e Incentro
J	<ul style="list-style-type: none"> • Centro da face [BCD] ⁽³⁾ ⁽³⁾ Baricentro, Ortocentro, Circuncentro e Incentro
L	<ul style="list-style-type: none"> • Centro da face [CAD] ⁽⁴⁾ ⁽⁴⁾ Baricentro, Ortocentro, Circuncentro e Incentro
[KD]	<ul style="list-style-type: none"> • Altura do Tetraedro • Eixo de simetria de ordem ternária
[IC]	<ul style="list-style-type: none"> • Altura do Tetraedro • Eixo de simetria de ordem ternária
[JA]	<ul style="list-style-type: none"> • Altura do Tetraedro • Eixo de simetria de ordem ternária
[LB]	<ul style="list-style-type: none"> • Altura do Tetraedro • Eixo de simetria de ordem ternária
O	<ul style="list-style-type: none"> • Centro do Tetraedro • Centro da superfície esférica circunscritível • Centro da superfície esférica inscritível • Centro da superfície esférica tangível às arestas • Baricentro ou centro gravítico / de massa ⁽⁵⁾ ⁽⁵⁾ Num meio gravitacional uniforme os centros coincidem.
[OA]	<ul style="list-style-type: none"> • Raio, tal como [OB], [OC] e [OD]
[OK]	<ul style="list-style-type: none"> • Apótema, tal como [OI], [OJ] e [OL]
R	<ul style="list-style-type: none"> • Ponto médio da aresta [AD]
S	<ul style="list-style-type: none"> • Ponto médio da aresta [BD]
T	<ul style="list-style-type: none"> • Ponto médio da aresta [CD]
[NT]	<ul style="list-style-type: none"> • Diâmetro da superfície esférica tangível às arestas • Eixo de simetria de ordem binária
[MR]	<ul style="list-style-type: none"> • Diâmetro da superfície esférica tangível às arestas • Eixo de simetria de ordem binária
[PS]	<ul style="list-style-type: none"> • Diâmetro da superfície esférica tangível às arestas • Eixo de simetria de ordem binária
γ	<ul style="list-style-type: none"> • Plano de simetria determinado por ADM ⁽⁶⁾ ⁽⁶⁾ O tetraedro admite seis planos de simetria

4 Representação do Tetraedro regular em dupla projeção ortogonal

4.1 Casos e variantes admitidos para a face horizontal

Considerando-se o *Plano Frontal de Projeção* como referência, a face horizontal admite dois casos distintos no que respeita à direção das suas arestas, Quadro 4.

Quadro 4 – Casos admitidos para a direção das arestas da face horizontal do tetraedro regular.

Casos / Variantes	Caracterização / Posição relativa entre os lados e φ_0
a) Geral / Arbitrária	Três lados oblíquos
b) Particular	b1) Dois lados oblíquos e um lado perpendicular
	b2) Dois lados oblíquos e um lado paralelo

A relação entre os lados da face horizontal e o plano frontal de projeção tem implicações na determinação do vértice exterior a essa face: o mesmo é declarar que interfere na determinação da altura.

Projeções da face horizontal de acordo com as variantes expostas, Figura 4.

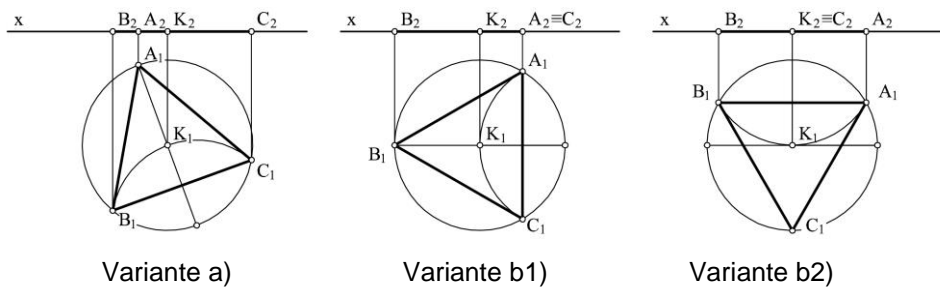


Figura 4 - Casos admitidos para a face horizontal relativamente à direção das arestas.

4.2 Posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal

O posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face de nível coincide com a projeção horizontal do centro dessa face.

Assim, considerando-se um tetraedro regular com face horizontal **[ABC]** e **D** como vértice exterior, registamos que **D₁** coincide com **K₁**, entendendo-se **K** como centro do triângulo de nível, Figura 5.

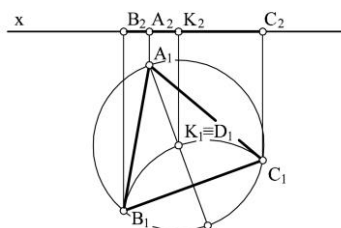


Figura 5 - Lugar Geométrico da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal.

Este facto é recorrentemente utilizado para, a partir daí, se iniciar a determinação da altura do poliedro e o posicionamento exato do vértice **D**. Do exposto, o tetraedro regular é obrigatoriamente reto, ou seja, **[KD]** é perpendicular a **[ABC]**, e conhece-se a projeção horizontal do poliedro. O vértice **D** pertence, pois, ao eixo vertical **e** que contém **K**, Figura 6.

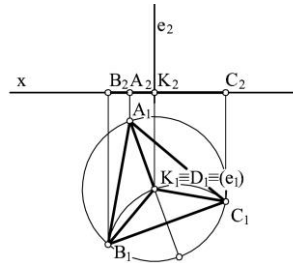


Figura 6 - Lugar geométrico do vértice **D**.

Ainda que verdadeiras as propriedades declaradas, parece-nos infrutífero avançarmos para a determinação do vértice **D** sem compreendermos as razões de tal fenómeno. Simultaneamente, consideramos pouco didático edificarmos as projeções do tetraedro com gênese nas variantes particulares *b1)* ou *b2)*, anteriormente descritas, em detrimento da geral *a)*. Tal procedimento jamais serve o desígnio nobre da Geometria Descritiva que passa, entre outros aspetos, pela necessidade e obrigatoriedade de compreendermos as relações espaciais e, ao mesmo tempo, as relações biunívocas entre espaço e *épura*.

No seguimento, propomos:

- 1) Entender e justificar o posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal;
- 2) Estudar a determinação da altura do tetraedro regular partindo da variante geral admitida para face de nível:
 - a) Ignorar, num primeiro momento, o conhecimento sobre a posição da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal;
 - b) Conhecer concepções e métodos geométricos para determinar a posição da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal e a altura do poliedro.

4.3 Justificação relativa ao posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal

Conhecidas, sumariamente, as propriedades gerais dos poliedros regulares, especificamente,

- (a) Faces poligonais regulares;

- (b) Faces poligonais iguais;
 - (c) Arestas com comprimento linear igual;
 - (d) Retilíneo dos diedros com amplitudes angulares iguais;
 - (e) Inscritíveis em superfície esférica;
 - (f) Circunscritíveis em superfície esférica;
 - (g) Convergência da mesma quantidade de arestas em cada vértice;
- alcançamos o posicionamento da projeção horizontal do vértice **D**, de forma empírica e pouco segura ou, de forma segura, através do *Pensamento Geométrico* fundado no raciocínio intuitivo.

Observação: para simplificarmos os raciocínios, consideraremos, doravante, a face horizontal **[ABC]** do tetraedro regular contida no plano horizontal de projeção v_0 , e as três faces não horizontais **[ABD]**, **[BCD]** e **[CAD]**, contidas imaginariamente nos planos α , β e θ .

i. Raciocínio i

As três faces não horizontais **[ABD]**, **[BCD]** e **[CAD]**, respectivamente contidas nos planos α , β e θ , intersectam-se segundo um ponto comum **D**. O vértice **D** é espacialmente equidistante às arestas **[AB]**, **[BC]** e **[CA]**, contidas, respectivamente, em h_α , h_β e h_θ . Assim, na justificação que α , β e θ têm retilíneos de igual amplitude angular com v_0 , a projeção horizontal das distâncias mencionadas é graficamente igual já que amplitudes angulares iguais implicam, forçosamente, coeficientes de deformação iguais em projeção, Figura 7.

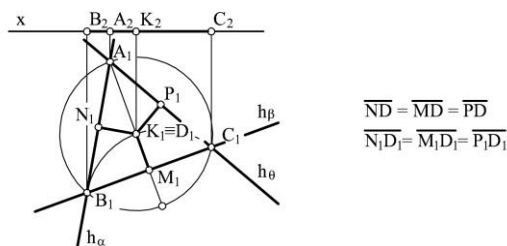


Figura 7 - Raciocínio i relativo ao posicionamento de D_1 .

ii. Raciocínio ii

As três faces não horizontais **[ABD]**, **[BCD]** e **[CAD]**, respectivamente contidas nos planos α , β e θ , intersectam-se duas a duas, determinando três retas de intersecção, nomeadamente: $\alpha \cap \beta \equiv i$; $\beta \cap \theta \equiv i'$; $\theta \cap \alpha \equiv i''$

No que concerne à reta de intersecção entre os planos α e β , que designaremos por **i**, conhecemos o seu traço horizontal que se posiciona no vértice **B** do tetraedro.

Desse facto, a projecção horizontal de i fica definida por B_1 e pela sua direcção, que corresponde à bissetriz do ângulo formado pelas arestas $[AB]$ e $[BC]$. Tal declaração decorre da evidência segundo a qual os retilíneos entre esses planos e v_0 são iguais, o que, por sua vez, implica que $h_\alpha \angle i = h_\beta \angle i$. Do exposto, intui-se que i_1 tem igual amplitude angular com os traços horizontais dos planos considerados. Conhece-se, ainda, que D é ponto de i por pertencer às faces $[ABD]$ e $[BCD]$ e, dedutivamente, que D_1 pertence a i_1 . Podemos, finalmente, declarar que i_1 é o lugar geométrico ao qual pertence a projecção horizontal do vértice D .

Transpondo o raciocínio para os planos β e θ , que obedecem ao mesmo problema, declaramos que i'_1 corresponde à bissetriz entre as arestas $[BC]$ e $[CA]$ ou $[B_1C_1]$ e $[C_1A_1]$, e que D , ao pertencer a i' , obriga que i'_1 seja, igualmente, o lugar geométrico ao qual pertence a projecção horizontal do vértice D .

Perante as verdades anteriores, declara-se que D_1 coincide com K_1 na medida que fica determinado pela intersecção entre i_1 e i'_1 , Figura 8.

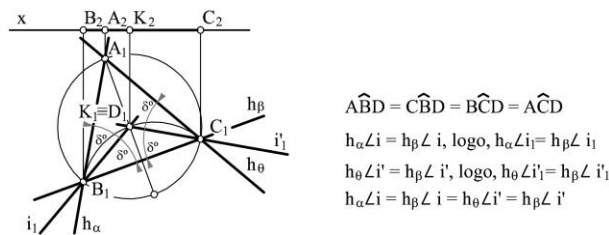


Figura 8 – Raciocínio ii relativo ao posicionamento de D_1 .

iii. Raciocínio iii

O vértice D é ponto de intersecção entre as medianas das faces $[ABD]$, $[BCD]$ e $[CAD]$, sendo que são essas medianas que apresentam a maior amplitude com v_0 . As medianas de que falamos são retas de maior declive dos planos α , β e θ , logo, projetam-se horizontalmente a 90° com os traços horizontais dos mesmos e com a projecção horizontal das arestas da face de nível. Observa-se, ainda, que as medianas contêm o ponto médio das arestas horizontais possibilitando, dessa forma, a sua representação e, conseqüente, a determinação de D_1 . Uma vez mais, conclui-se que D_1 coincide com K_1 , Figura 9.

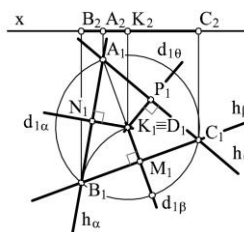


Figura 9 - Raciocínio iii relativo ao posicionamento de D_1

iv. Raciocínio iv

As arestas do tetraedro regular têm igual comprimento linear, implicando, forçosamente, que **D** seja equidistante em relação a **A**, **B** e **C**. Sendo **[ABC]** horizontal e **[AB] = [BC] = [CA]**, então as arestas não horizontais **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** têm igual amplitude com v_0 e apresentam igual coeficiente de deformação em projeção horizontal. Do exposto, conclui-se que **[A₁ D₁] = [B₁ D₁] = [C₁ D₁]**, e logo, inevitavelmente, que **D₁** coincide com **K₁** na medida que este último é equidistante relativamente a **A₁**, **B₁** e **C₁**, Figura 10.

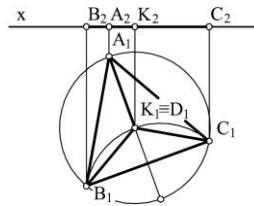


Figura 10 - Raciocínio iv relativo ao posicionamento de **D₁**

v. Raciocínio v

No tetraedro regular as distâncias entre vértices são iguais. Esta propriedade permite compreender que:

- os vértices **B**, **C** e **D** existem, potencialmente, numa superfície esférica **[σ]** de centro **A** e raio igual ao comprimento linear de **[AB]**, **[AC]** e **[AD]**;
- os vértices **A**, **C** e **D** existem, potencialmente, numa superfície esférica **[δ]** de centro **B** e raio igual ao comprimento linear de **[BA]**, **[BC]** e **[BD]**;
- os vértices **A**, **B** e **D** existem, potencialmente, numa superfície esférica **[ω]** de centro **C** e raio igual ao comprimento linear de **[CA]**, **[CB]** e **[CD]**.

É também verdade que os vértices **A**, **B** e **C** existem numa superfície esférica de centro **D** e raio igual ao comprimento linear de **[DA]**, **[DB]** e **[DC]**, no entanto, esta propriedade não será convocada para o raciocínio.

Compreendemos, por outro lado, que as superfícies esféricas de centros **B** e **C** se intersectam segundo uma circunferência **[c]** que pertence ao plano γ mediador da aresta **[BC]** e tem centro no ponto médio desse segmento. Daí se infere que o plano mediador γ é projetante horizontal, logo, que a projeção horizontal da circunferência **[c]** coincide com a bissetriz do ângulo definido entre arestas **[BA]** e **[AC]**.

O mesmo raciocínio se aplica às superfícies esféricas de centros **A** e **B** que se intersectam segundo uma circunferência **[c']** que pertence ao plano ζ mediador da aresta **[AB]** e tem centro no ponto médio desse segmento, pelo que, a projeção

horizontal de $[c']$ coincide com a bissetriz do ângulo determinado entre arestas $[AC]$ e $[BC]$.

Poderíamos continuar. No entanto, sabendo que D pertence às três superfícies esféricas auxiliares, esse vértice fica definido pela intersecção ente $[c]$ e $[c']$, não sendo necessário determinar a circunferência de intersecção entre as superfícies esféricas de centros A e C . A nível do espaço existem dois lugares geométricos para D . Contudo, prova-se, uma vez mais, que a projeção horizontal desse ponto coincide com K_1 , Figura 11.

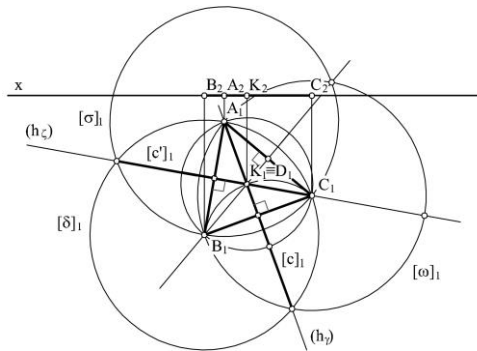


Figura 11 - Raciocínio v relativo ao posicionamento de D_1

vi. Raciocínio vi

As arestas do tetraedro regular têm igual comprimento linear, implicando, forçosamente, que D seja equidistante a A , B e C . Sendo $[ABC]$ horizontal e $[AB] = [BC] = [CA]$, as arestas não horizontais têm, por conseguinte, igual amplitude angular com v_0 . Face ao exposto, o tetraedro é circunscritível por uma superfície cônica de revolução circular cujo traço horizontal contém A , B e C . A superfície cônica $[\psi]$, ao conter as arestas $[AD]$, $[BD]$ e $[CD]$ do poliedro, tem, inevitavelmente, D como vértice. Daqui se infere que D_1 coincide com K_1 na medida que K é simultaneamente centro do triângulo $[ABC]$, centro da circunferência que circunscreve a face horizontal do tetraedro e centro do traço horizontal da superfície cônica descrita, Figura 12.

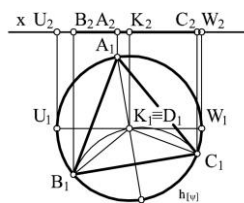


Figura 12 - Raciocínio vi relativo ao posicionamento de D_1

vii. Raciocínio vii

As faces do tetraedro regular consistem em quatro triângulos equiláteros iguais. Considera-se, no estudo proposto, o triângulo $[ABC]$ como face horizontal, pelo que

as demais contêm uma aresta em v_0 , assim como uma aresta comum duas a duas. As faces não horizontais obrigam-se a retílineos iguais de acordo com a justificação de que apresentam igual declive em relação ao plano horizontal de projeção. Em tais circunstâncias, se as faces não horizontais são iguais, se contêm uma aresta em v_0 e se apresentam igual declive, a deformação projecional neste plano é consequentemente igual, bem como a projeção horizontal de cada face. Assim sendo, o vértice D , comum a todas as faces não horizontais, tem a sua projeção horizontal coincidente com K_1 , sendo esta a única forma de garantir a igual projeção horizontal das faces $[ABD]$, $[BCD]$ e $[CAD]$, Figura 13.

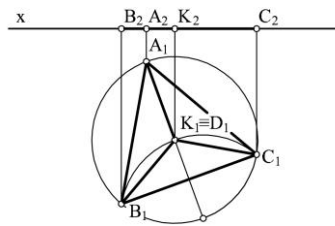


Figura 13 - Raciocínio vii relativo ao posicionamento de D_1

4.4 Determinação da altura do tetraedro regular com uma face horizontal: generalidades

A representação do tetraedro regular com uma face horizontal leva-se a cabo, por norma, a partir de quatro conhecimentos específicos, a saber:

- a) a localização da projeção horizontal do vértice omitido à face horizontal;
- b) o comprimento linear da altura das faces;
- c) o comprimento linear da aresta do poliedro;
- d) os planos de simetria do poliedro que contêm uma aresta, e, simultaneamente, a altura de duas faces que se intersectam segundo outra aresta de que os planos são mediadores, Figura 3.

O condicionamento existente em relação à representação prende-se com o facto de as amplitudes angulares dos retílineos dos diedros não serem exatas e passíveis de serem representados ou transportadas, ocorrendo o mesmo no que respeita à amplitude angular entre as arestas e as faces.

Perante este cenário, recorrentemente observamos que a representação do tetraedro regular:

- se inicia a partir das variantes particulares $b1)$ e $b2)$ admitidas para a face horizontal, Figura 4;
- se processa a partir da colocação em verdadeira grandeza de um dos planos de simetria, quando a face horizontal se apresenta na caso geral a), Figura 4.

4.5 Estudo da determinação da altura do tetraedro regular com uma face horizontal

Após entendermos e justificarmos o posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face de nível, consideramos importante ignorar essa verdade atingida por via intuitiva, estudando e desenvolvendo a determinação da altura do tetraedro regular a partir do caso geral admitido para a face horizontal, omitindo, inicialmente, o posicionamento de D_1 . Deixaremos para uma fase posterior as representações que recorram diretamente à verdadeira grandeza de um dos planos de simetria. Desejamos, pois, partir do geral para o particular, omitindo, ainda, o posicionamento de D_1 .

Métodos e processos a aplicar no caso *geral a)* admitido para a face horizontal:

- a) Rebatimento / rotação das faces não horizontais;
- b) Superfície cônica circunscrita;
- c) Superfícies esféricas com valor de raio igual ao comprimento linear da aresta;
- d) Mudança de plano de projeção;
- e) Rotação do plano mediador / de simetria;
- f) Rebatimento do plano mediador / de simetria;
- g) Rotação do poliedro;
- h) Arco capaz;
- i) Tetraedro auxiliar.

Métodos e processos a aplicar na variante *particular b1)* admitida para a face horizontal:

- a) Verdadeira grandeza do plano de simetria paralelo a φ_0 ;
- b) Superfície cônica circunscrita;
- c) Arco capaz;

Métodos e processos a aplicar na variante *particular b2)* admitida para a face horizontal:

- a) Verdadeira grandeza do plano de simetria paralelo a π_0 / Projeção lateral;
- b) Superfície cônica circunscrita;
- c) Arco capaz;

Desenvolvimento:

Caso *geral a*) admitido para a para a face horizontal:

a) Rebatimento / rotação das faces não horizontais, Figuras 14 a, b:

- A representação inicia-se pelo rebatimento / rotação de duas faces não horizontais sobre v_0 ;
- O rebatimento / rotação tem como eixos as arestas horizontais;
- As faces não horizontais apresentam-se em V.G. em v_0 , após a aplicação do método;
- Inverte-se o rebatimento / rotação do vértice **D** através do método do triângulo de rebatimento, já que as faces têm orientações oblíquas;
- O vértice **D** pertence simultaneamente aos dois planos projetantes horizontais que auxiliam o método e, por serem os planos dos rebatimentos desse vértice, são ortogonais às respectivas arestas da 'base' do tetraedro regular, contêm D_R e, forçosamente, D_1 . Ao mesmo tempo, esses planos contêm as retas de maior declive das faces rebatidas. A intersecção, em projeção horizontal, dos planos e das retas de maior declive determinam D_1 .
- Conhecida a posição de D_1 torna-se exequível a inversão do método e a determinação da altura do poliedro ou cota do vértice **D**.

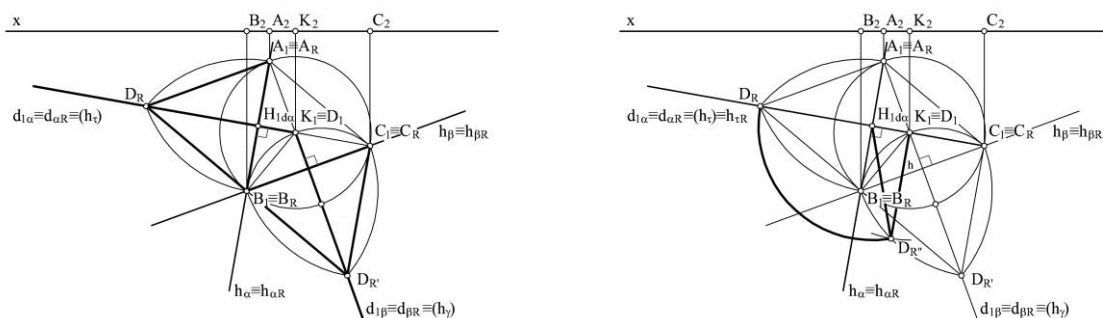


Figura 14 a - Metodologia a) aplicada no caso *geral a*) admitido para a para a face de nível.

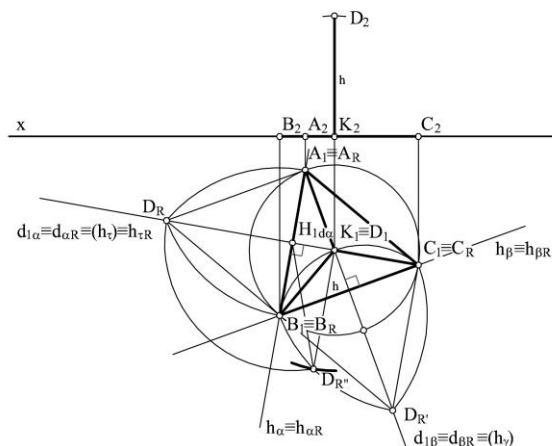


Figura 14 b - Metodologia a) aplicada no caso *geral a*) admitido para a para a face de nível.

b) Superfície cônica circunscrita, Figura 15:

- O tetraedro regular é circunscritível por uma superfície cônica de revolução de diretriz circular que terá **D** como vértice;
- A amplitude angular entre as geratrizes da superfície cônica descrita e \mathbf{v}_0 é constante quando a sua diretriz pertence ao plano, assim, a amplitude angular entre as arestas do tetraedro e \mathbf{v}_0 é igual à amplitude angular entre as geratrizes da superfície cônica e o mesmo plano;
- Contudo, a amplitude angular não é exata, obrigando à determinação do vértice da superfície cônica através o comprimento linear do troço de geratriz compreendida entre \mathbf{v}_0 e **D**, sendo que este igual ao comprimento linear da aresta do tetraedro;
- Recorre-se à projeção horizontal da face de nível que expõe a verdadeira grandeza do comprimento linear das arestas e transporta-se, graficamente, esse valor para a projeção frontal de forma a representar as geratrizes (troços) frontais em V.G. com extremos nas projeções frontais pontos de maior e menor abcissa, a determinar previamente na circunferência circunscrita à face horizontal.

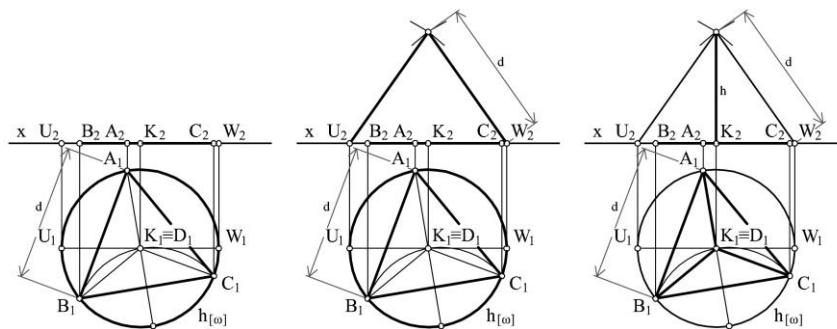


Figura 15 - Metodologia b) aplicada no caso *geral* a) admitido para a para a face de nível.

c) Superfícies esféricas com valor de raio igual ao comprimento linear da aresta, Figuras 16, 17:

Observação: consultar 'Raciocínio \mathbf{v} '

- Com centro nos vértices pertencentes à face horizontal, descrevem-se três superfícies esféricas com raio igual ao valor do comprimento linear da aresta do tetraedro;
- O valor do raio dos contornos horizontal e frontal das superfícies esféricas projeta-se em V.G., sendo ele igual ao comprimento linear das arestas horizontais do poliedro, também projetadas em V.G. em \mathbf{v}_0 ;
- Como as superfícies esféricas têm igual raio e centros no mesmo plano, intersectam-se segundo circunferências que pertencem aos planos mediadores das arestas horizontais do poliedro;

- A intersecção, em projeção horizontal, de dois planos mediadores dá-nos a intersecção entre as circunferências, ou seja, o lugar geométrico de **D**, que espacialmente tem duas hipóteses, apresenta uma projeção horizontal única e coincide com **K₁** (centro da face horizontal do tetraedro), Figura 16;

Neste momento pode optar-se por:

- Determinar a V.G. da circunferência de intersecção **[c]** entre as duas superfícies esféricas **[δ]** e **[ω]** recorrendo, por exemplo, ao método de mudança de plano de projeção e, nessa sequência, a partir de **D₁** previamente determinado, obter a projeção frontal auxiliar do vértice **D**, que nos informa do valor da altura do poliedro, Figura 16;

Observação: o diâmetro e o raio da circunferência de intersecção entre quaisquer duas superfícies esféricas consideradas, no exemplo, projetam-se em V.G. em **v₀**.

- Determinar a V.G. da circunferência que delimita o círculo máximo de uma das superfícies esféricas auxiliares. Sabe-se, pois, que o vértice **D** pertence aos círculos máximos – circunferências máximas – determinados pela intersecção entre os planos de simetria / mediadores das arestas e as superfícies esféricas auxiliares, Figura 17.

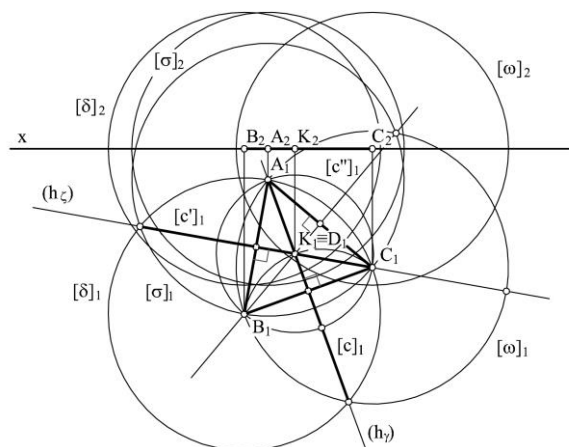


Figura 16 - Metodologia c) aplicada no caso *geral* a) admitido para a para a face de nível.

No exemplo trabalhado, optamos pela segunda hipótese enunciada, Figura 17, assim:

- Determina-se a verdadeira grandeza da circunferência de intersecção entre a superfície esférica com centro no vértice **B** e o plano de simetria do poliedro, simultaneamente, mediador da aresta **[AC]**. Note-se que a circunferência mencionada é o limite de um dos círculos máximos da superfície esférica sendo, portanto, uma circunferência máxima. Neste caso, recorreremos ao método de mudança de plano de projeção: alterou-se, especificamente, a orientação de **φ₀**, tornando frontal o plano de simetria referido.

- Obtida a V.G., nessa projeção frontal, da circunferência de intersecção $[c'']$, procura-se o lugar geométrico do vértice D , partindo da projeção D_1 previamente determinada e, seguidamente, transporta-se o valor da sua cota ou da altura do poliedro.

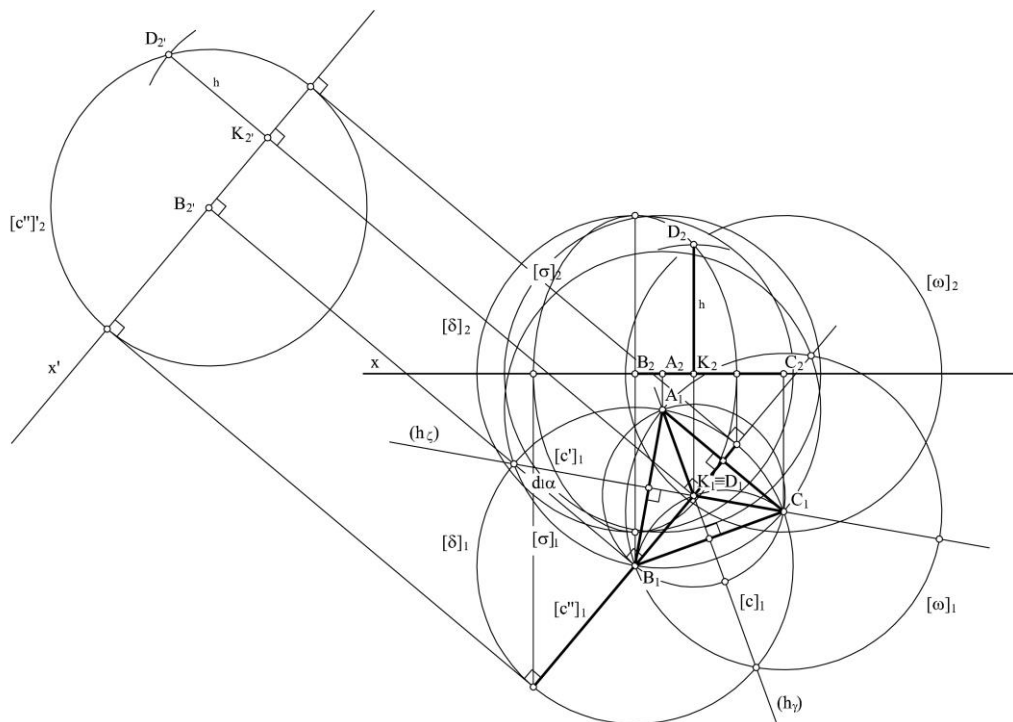


Figura 17 - Metodologia c) aplicada no caso *geral a)* admitido para a para a face de nível.

d) Mudança de plano de projeção, Figura 18:

- Através do método de mudança de plano de projeção, coloca-se em V.G. um dos planos mediadores das arestas horizontais, ou seja, um dos planos de simetria do tetraedro. Neste caso, optou-se por colocar em V.G. o plano mediador da aresta $[BC]$ do poliedro, transformando-o em plano frontal através da nova orientação de φ_0 ;

- Nesta orientação, o plano mediador apresenta em V.G. a aresta $[AD]$ e a altura $[H_{d\beta} D]$ pertencente à face $[BCD]$. Assim, após a mudança, partindo das novas projeções de $H_{d\beta}$ (ponto médio de $[BC]$) e do vértice A , representa-se um triângulo isósceles sabendo que o comprimento linear de $[AD]$ é igual ao valor do comprimento linear da aresta do tetraedro e que $[H_{d\beta} D]$ é igual à altura de qualquer triângulo / face – comprimentos lineares que estão projetados em V.G. em v_0 ;

- Após a determinação de D na mudança, inverte-se o processo, transportando-se o valor da sua cota ou da altura do poliedro.

Observação: o raciocínio pode exclusivamente passar por determinar graficamente, neste caso, a aresta $[AD]$ e a altura $[H_{d\beta} D]$ em V.G., omitindo-se o plano mediador / de simetria.

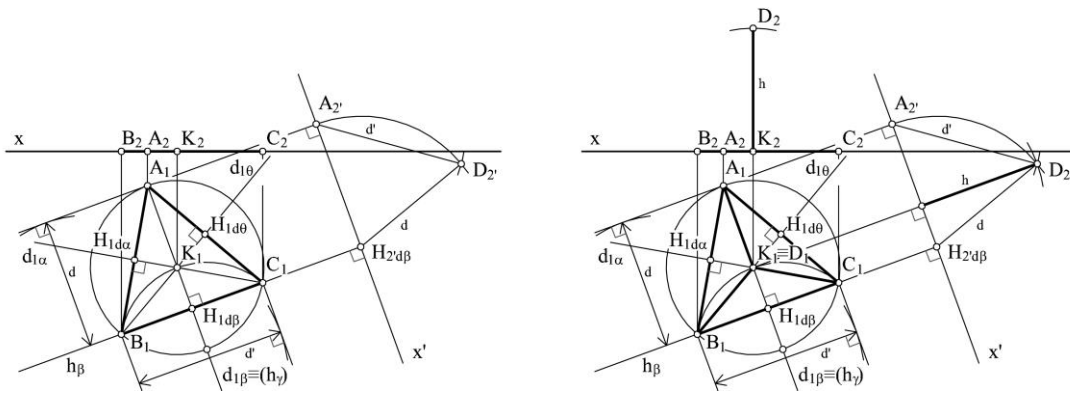


Figura 18 - Metodologia d) aplicada no caso *geral* a) admitido para a para a face de nível.

e) Rotação do plano mediador / de simetria, Figura 19:

- A metodologia aplicada recorre ao raciocínio anterior no que respeita a um dos planos de simetria do tetraedro e mediador de uma das arestas horizontais; contudo, a determinação da V.G. do plano é feita com recurso ao método de rotação;
- Neste exemplo, rodou-se o plano mediador da aresta horizontal **[AB]** em torno de um eixo vertical que contém o vértice **C**.

Observação: o raciocínio pode passar exclusivamente por determinar graficamente, neste caso, a aresta **[CD]** e a altura **[H_{dα} D]** em V.G., omitindo-se o plano mediador / de simetria.

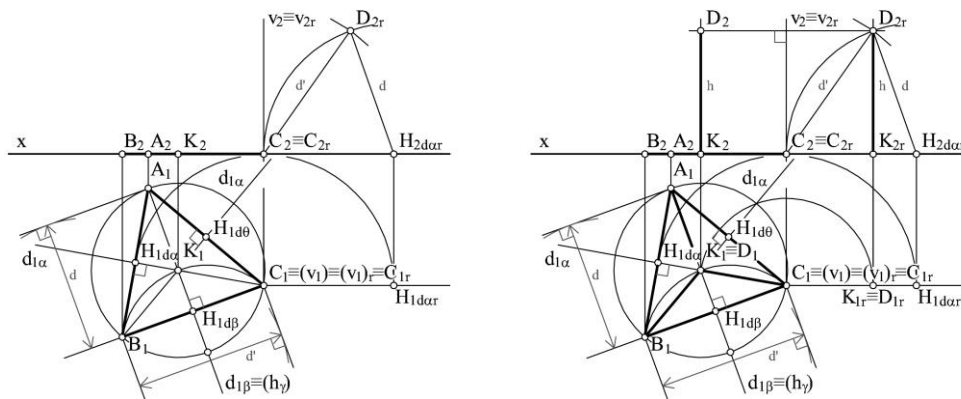


Figura 19 - Metodologia e) aplicada no caso *geral* a) admitido para a para a face de nível.

f) Rebatimento do plano mediador / de simetria, Figura 20:

- A metodologia aplicada recorre aos raciocínios anteriores (aplicados em *d*) e *e*)) no que respeita a um dos planos de simetria do tetraedro e mediador de uma das arestas horizontais; contudo, a determinação da V.G. do plano é feita com recurso ao método de rebatimento.
- Neste exemplo, rebateu-se o plano mediador γ da aresta horizontal **[BC]**, em torno do seu traço frontal;

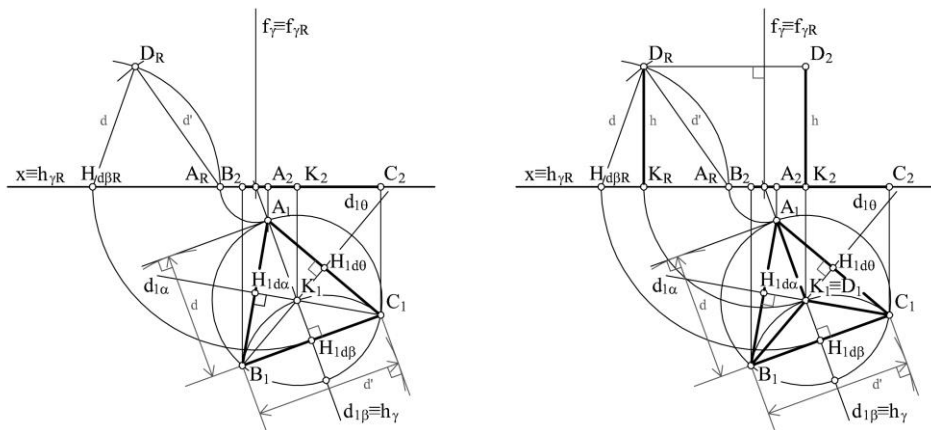


Figura 20 - Metodologia f) aplicada no caso geral a) admitido para a para a face de nível.

g) Rotação do poliedro, Figura 21:

- Também podemos recorrer ao método de rotação para rodar o próprio tetraedro. Nesse caso, o eixo de rotação deve ser vertical e a amplitude angular de rotação deve garantir, novamente, a V.G. de um dos planos de simetria / mediador de uma aresta horizontal;
- No exemplo, a rotação coloca o plano mediador da aresta **[AC]** em V.G.; no entanto, apresenta alguma abstração na medida que não assume projetionalmente o plano. Estamos portanto focados em obter a V.G. da aresta **[BD]** e altura **[H_{d0} D]** – da face **[CAD]** –;
- Após a rotação, construímos o triângulo isósceles **[B D H_{d0}]** seguindo critérios idênticos que foram aplicados em d);
- O exemplo não apresenta, graficamente, a melhor opção para a localização do eixo de rotação, sendo, neste caso, um dos eixos de simetria de ordem ternária do poliedro. Contudo, a escolha foi deliberada a fim de percebermos a proximidade em relação à proposta b), ou seja, o método da superfície cônica circunscritível.

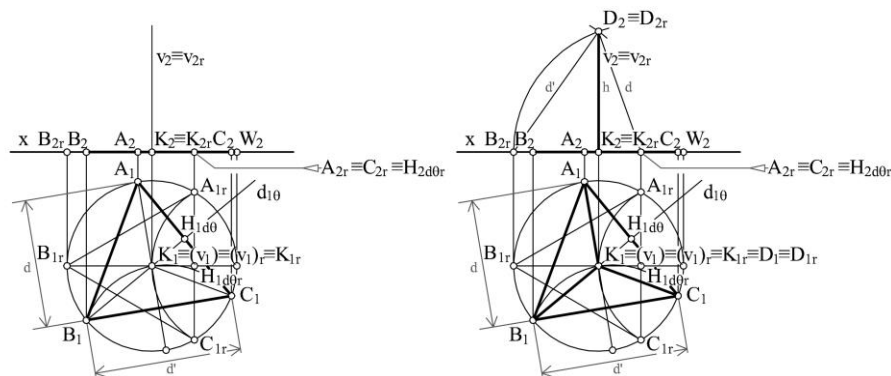


Figura 21 – Metodologia g) aplicada no caso geral a) admitido para a para a face de nível.

h) Arco capaz, Figura 22:

- Esta proposta exige conhecer os seguintes pré-requisitos:

- O centro do triângulo equilátero localiza-se a um terço da sua altura;
- O eixo de simetria de ordem ternária (a *altura*) do tetraedro regular é perpendicular à face e tem como um dos extremos o centro dessa face;
- A semicircunferência é o arco-capaz de 90° .

- Estabelecidos estes factos, é possível determinar a projeção frontal do tetraedro a partir do momento que colocamos em V.G. um dos planos de simetria / mediador. Neste exemplo, optou-se pela V.G. do plano mediador da aresta horizontal **[BC]**, recorrendo-se ao método de mudança de plano de projeção;

- No próximo momento, ignorámos a posição de D_1 , no sentido de compreendermos o alcance desta proposta. Assim, dividimos a altura da face em três unidades iguais e traçámos o arco capaz de 90° , de extremos **[A H_{dβ}]**, relativo à altura do tetraedro **[AJ]**;

- De seguida, na V.G. com centro em $H_{2'dβ}$ e raio igual a um terço da altura da face, ou seja, com valor **[K H_{dβ}]**, descrevemos um arco de circunferência que intersecta o arco capaz determinando a projeção frontal auxiliar de J' – centro da face **[BCD]** –;

- De forma a fugirmos a K_1 e D_1 e, também, ao segmento **[AJ]** que define a altura a partir da face **[BCD]**, desenhámos a reta de suporte que contém a altura da face **[BCD]** e, sobre ela, a partir de J colocámos graficamente dois terços da altura **[A H_{dβ}]**, obtendo a localização de D em V.G.;

- Finalmente, inverteu-se o processo determinando D_1 no traço horizontal do plano de simetria – cuja projeção omitimos –.

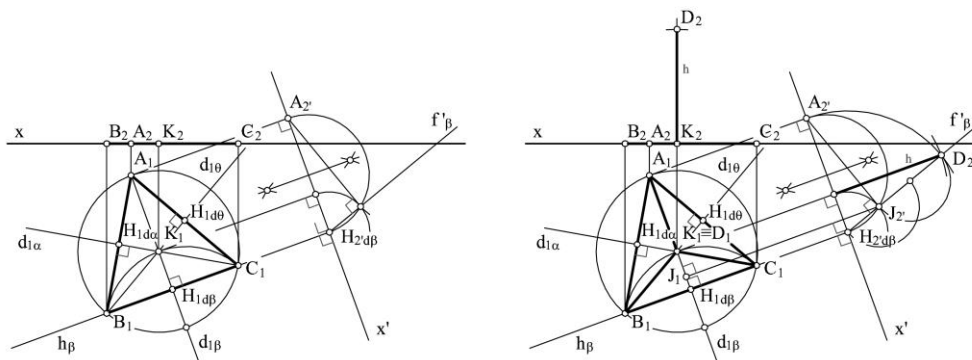


Figura 22 – Metodologia h) aplicada no caso *geral* a) admitido para a para a face de nível.

Observação: a é pura situada do lado direito apresenta, ainda, outras duas vias para determinar $D_{2'}$, nomeadamente: i) intersecção entre o arco de circunferência com centro em $H_{dβ}$ e raio igual à altura das faces e o plano β ; ii) intersecção entre o eixo vertical do tetraedro e o plano β .

i) Tetraedro auxiliar.

- A última proposta didática que apresentamos para a determinação do vértice **D** e da altura do tetraedro regular recorre à representação de um tetraedro regular auxiliar com face horizontal e com a mesma medida de aresta; porém, partindo de uma variante facilitadora no que respeita à face de nível, propomos, pois, a variante *b1*);
- Os tetraedros terão a mesma altura, logo, a intersecção entre o plano de nível que contém o vértice **D'** do tetraedro auxiliar e o eixo vertical do tetraedro inicial, definirá **D**;
- Neste caso, não estamos a trabalhar com o conhecimento prévio que **K₁** coincide com **D₁**; esse conhecimento ser-nos-á, pois, dado através tetraedro auxiliar na medida que **D'₁** coincide com **K'₁**, considerando-se **K'** centro da face horizontal e **D'** exterior a essa face – ambos pertencentes ao tetraedro auxiliar –.

5 Projeções diédricas ortogonais do tetraedro regular segundo as variantes admitidas para a face horizontal

O estudo anterior permite-nos finalmente representar as projeções diédricas do tetraedro regular, uma vez conhecidas as projeções do vértice **D**, omisso à face horizontal **[ABC]**.

Observa-se que o contorno aparente da projeção frontal do tetraedro regular, segundo o caso *geral a*), e *variantes particulares b1*) e *b2*) admitidas para a face horizontal, consiste num triângulo escaleno, num triângulo isósceles, e novamente num triângulo isósceles, respetivamente, permitindo concluir o seguinte:

- Sempre que a face horizontal do tetraedro regular se encontra segundo o caso geral, o contorno da sua projeção frontal é um triângulo escaleno, Figura 23;
- Sempre que a face horizontal do tetraedro regular se encontra segundo uma variante particular, o contorno aparente da sua projeção frontal é um triângulo isósceles, Figura 23;
- Sempre que o tetraedro regular apresenta uma face horizontal, o seu contorno aparente frontal nunca será um triângulo equilátero, Figura 23.

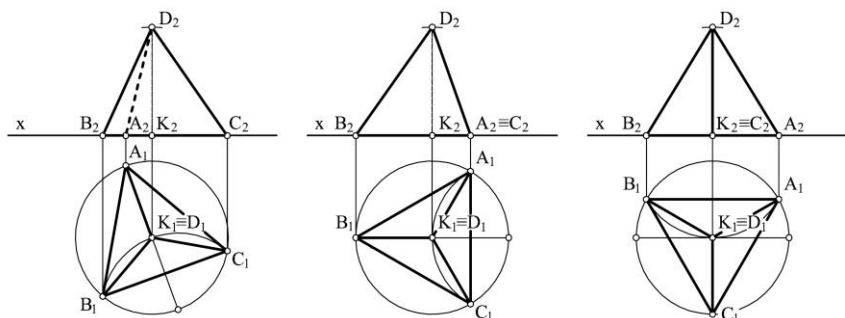


Figura 23 – Da esquerda para a direita: caso geral *a*); variantes particulares *b1*) e *b2*).

Observamos ainda que:

- No caso *geral a)*, os lados do triângulo escaleno, que definem a projeção frontal do contorno aparente frontal do tetraedro regular, não têm comprimentos lineares com valores particulares;
- Na variante *particular b1)*, os lados do triângulo isósceles, que definem a projeção frontal do contorno aparente frontal do tetraedro regular, apresentam comprimentos lineares com valores particulares, já que dois deles têm o valor do comprimento linear da altura da face, e o terceiro expõe o valor do comprimento linear da aresta do poliedro;
- Na variante *particular b2)*, os lados do triângulo isósceles, que definem a projeção frontal do contorno aparente frontal do tetraedro regular, apresentam comprimento linear com valor particular apenas num dos lados, a saber, no horizontal que expõe o valor do comprimento linear da aresta do poliedro.

6 Conclusões

O tetraedro regular admite dois casos distintos no que respeita à relação entre as arestas da face horizontal e o plano frontal de projeção, sendo um geral e o outro particular, admitindo esta, por sua vez, duas variantes.

Os casos admitidos para a face horizontal têm implicações no nível de complexidade que envolve a determinação do vértice exterior a essa face ou a altura do tetraedro regular.

É possível conhecer intuitivamente, e de modo empírico, o posicionamento da projeção horizontal do vértice exterior à face horizontal de um tetraedro regular. O mesmo resultado pode ser alcançado através de raciocínio dedutivo, durante o qual é também acionada a imaginação espacial.

Será fecundo promover a reflexão, a descoberta e a justificação relativas à posição horizontal do vértice exterior à face de nível, pertencente a um tetraedro regular, contudo, do ponto de vista didático, esse conhecimento deverá ser ignorado até se percorrerem todos os métodos do caso geral.

A representação, em dupla projeção ortogonal, de um tetraedro regular com face horizontal iniciada a partir das variantes *b1)* ou *b2)*, ou ainda, a partir do conhecimento da posição da projeção horizontal do vértice exterior à face de nível, revela-se estéril, não servindo a Geometria Descritiva na medida em que não parte do geral para o particular e coloca o indivíduo num patamar ao qual não chegou por iniciativa e raciocínio próprios.

A dupla projeção ortogonal do tetraedro regular com face horizontal deve desenvolver-se cuidando o caso geral e omitir inicialmente a projeção horizontal do vértice exterior a essa face.

O tetraedro regular, com uma face horizontal, admite vários métodos para a sua representação em dupla projeção ortogonal, sem ficarem condicionados pelo conhecimento prévio da posição horizontal do vértice exterior à face de nível, e que importa experimentar.

A representação do tetraedro regular que parte das variantes particulares admitidas para a face de nível deve operar-se num segundo momento de modo a que se confrontem os níveis de complexidade e a projeção das propriedades de alguns dos seus elementos.

As propriedades da projeção frontal do contorno aparente frontal do tetraedro regular com uma face de nível estão condicionadas pela relação estabelecida entre as arestas horizontais e o plano frontal de projeção.

Em suma, pensamos que este artigo prova a existência de uma pluralidade de raciocínios e métodos que podem ser convocados em Geometria Descritiva, mesmo em relação a temas que aparentam ser parcos nessa possibilidade.

Referências

ABAJO, Francisco Javier Rodriguez de. **Geometria Descritiva | Tomo 1 | Sistema Diedrico**. San Sebastian: Editorial Donostiarra, S.A., 1992.

ASENSI, Fernando Izquierdo **Geometria Descritiva**. Madrid: Ed. Dossat SA., 2000.

FERNÁNDEZ, Angel Taibo. **Elementos de Geometría Descritiva**. Madrid: Blass, S.A., 1944.

GONÇALVES, Luís. **Geometria Descritiva 2 | 11.º ano de escolaridade**. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense, Lda, 1981.

NANNONI, Dante. **Geometria Prospettiva Progetto | Il disegno per la scuola media superiore**. Bologna: Cappelli Editore, 1997.

RODRIGUES, Alvaro J. **Geometria Descritiva | Operações Fundamentais e Poliedros**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1968.

XAVIER, João Pedro; REBELO, José Augusto. **[Programa] Geometria Descritiva A: 10º e 11º ou 11º e 12º anos | Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias e Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais**. Lisboa: M.E., 2001.