

## EXPRESSÃO GRÁFICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA – PRÁTICAS DOCENTE NO PIBID/UFPR

*Anderson Roges Teixeira Góes<sup>1</sup>  
Juliana da Cruz de Melo<sup>2</sup>  
Thadeu Angelo Miqueletto<sup>3</sup>*

**Resumo:** Este trabalho apresenta como os recursos da Expressão Gráfica são facilitadores no processo de ensino da Matemática. Para isto, são descritas e analisadas quatro atividades desenvolvidas no “Subprojeto Matemática 3” do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), que possui como finalidade desenvolver metodologias que envolvam os recursos provenientes da Expressão Gráfica e as estratégias denominadas de Tendência em Educação Matemática. Foram utilizados materiais manipuláveis no desenvolvimento de atividades investigativas para a compreensão de conceitos matemáticos como polígonos, semelhança de triângulos, pirâmides e equação do 1º grau. Os resultados mostram que os conceitos abordados por meio da Expressão Gráfica deixam de ser abstratos e se concretizam, passando a ter visualidade.

**Palavras-chave:** Geometria, matemática, atividades investigativas, materiais manipuláveis.

**Resumen:** Este trabajo muestra cómo los elementos de Expresión Gráfica son facilitadores en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Para esto, se describen y analizan cuatro actividades desarrolladas en “Subproyecto Matemática 3” del Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID), que tiene como objetivo desarrollar metodologías con elementos la Expresión Gráfica y las estrategias llamadas de Tendencia en la Educación Matemática. Utilizamos manipulativos para desarrollar actividades de investigación para la comprensión de los conceptos matemáticos tales como polígonos, triángulos, pirâmides y ecuación de 1er grado. Los resultados muestran que los conceptos desarrollados a través de la Expresión Gráfica ya no son abstractos y pasan a tener visualidad y se materializan.

**Palabras clave:** Matemáticas, geometria, actividades de investigación, manipulativos.

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Paraná – Departamento de Expressão e Programa de Pós-Graduação em Educação/Teoria e Prática de Ensino. [artgoes@ufpr.br](mailto:artgoes@ufpr.br)

<sup>2</sup> Secretaria Municipal de Educação de Curitiba/Pr – Escola Municipal Coronel Durival de Britto e Silva. [ju\\_cmelo@hotmail.com](mailto:ju_cmelo@hotmail.com)

<sup>3</sup> Secretaria Estadual de Educação do Paraná – Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli. [thadeumiqueletto@gmail.com](mailto:thadeumiqueletto@gmail.com)

## 1 O Subprojeto “Matemática 3” do PIBID/UFPR

Este trabalho descreve e analisa quatro práticas pedagógicas realizadas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) – Subprojeto Matemática 3. Dentre os objetivos deste subprojeto do PIBID, além dos indicados pela Portaria 96/2013 da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior (CAPES), está o de utilizar os recursos da Expressão Gráfica no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, onde

“Expressão Gráfica é um campo de estudo que utiliza elementos de desenho, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. Dessa forma, a Expressão Gráfica pode auxiliar na solução de problemas, na transmissão de ideias, de concepções e de pontos de vista relacionados a tais conceitos”. (GÓES, 2013, p. 20)

As instituições parceiras no desenvolvimento do referido subprojeto do PIBID, desde fevereiro de 2014, são: Escola Municipal Coronel Durival de Britto e Silva, onde as práticas foram desenvolvidas com alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental; e Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli, que atende estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Além do professor da UFPR (denominado de coordenador de área pelo PIBID), em cada uma destas instituições há um professor da Educação Básica (denominado de supervisor no PIBID) que coordena o trabalho desenvolvido na escola juntamente com sete acadêmicos (denominados bolsistas IDs) do curso de Matemática.

Com os cortes financeiros sofridos pelos PIBID a partir de agosto de 2015, este subprojeto passou a desenvolver o trabalho apenas no Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli, com a presença de 10 acadêmicos que frequentam a escola semanalmente.

No início de cada ano letivo, a atividade desenvolvida pelos bolsistas IDs é a da familiarização do ambiente escolar, vivenciando seu futuro ambiente de trabalho. Para isto, realizam observações das práticas de professores de Matemática das instituições, não somente dos supervisores. Após esta fase, os bolsistas IDs planejam, com auxílio do supervisor e do coordenador de área, intervenções pedagógicas. Ainda, na escola os bolsistas IDs participam de outras atividades nas instituições, tais como atividades extraclasse, conselhos de classes, planejamento didático-pedagógico, oficinas pedagógicas e outras atribuições inerentes à docência.

Como parte da formação acadêmica, os estudantes de Matemática participantes do PIBID e os supervisores se reúnem, semanalmente, com o coordenador de área na UFPR para estudarem temas relacionados ao ensino e aprendizado desta área do conhecimento.

Dentre os temas estudados estão as Tendências em Educação Matemática como História da Matemática, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e Atividades Investigativas. Ainda, realizam pesquisas e estudos sobre possíveis recursos educacionais que facilitem a compreensão dos conceitos matemáticos, dentre eles, os materiais manipuláveis.

Neste artigo, são apresentadas quatro atividades de ensino da Matemática, aplicadas por acadêmicos da UFPR participantes do PIBID, tendo como fundamentação teórica a Tendência em Educação Matemática "Atividades Investigativas" por meio de materiais manipuláveis. Góes (2013) considera os materiais manipuláveis como um elemento da Expressão Gráfica.

## 2 Ensino da Matemática

As práticas pedagógicas apresentadas neste artigo são fundamentadas na Tendência em Educação Matemática "Atividades Investigativas" e no uso de materiais manipuláveis. Esta seção discursa brevemente sobre estes tópicos que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem da Matemática por meio da Expressão Gráfica.

A Investigação Matemática é defendida por vários autores (BRAUMANN, 2002; BROCARD; OLIVEIRA; PONTE, 2005; GÓES; GÓES, 2015) que acreditam que só se aprende a fazer, fazendo. Isto também é apontado nos PCNs:

“temos de questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação”. (BRASIL, 1997, p. 9)

Para que ocorra o processo de ensino-aprendizagem existem diversos fatores, dos quais o principal é a relação professor – aluno. Com isso, observa-se uma forte influência das ideias construtivistas, propostas por Piaget no início do século XX, na qual o professor tem a função de proporcionar determinadas situações para os alunos de modo que eles encontrem soluções e possam ser construtores do conhecimento.

Para Braumann (2002), compreender Matemática é o mesmo que se tornar capaz de realizar investigações de natureza matemática, uma vez que, somente assim, pode-se perceber, verdadeiramente, o que é Matemática, bem como sua utilidade na compreensão e na intervenção sobre o mundo. O autor compara o ato de aprender

Matemática ao ato de aprender a andar de bicicleta. Se não houver investigação acerca do objeto de estudo, para o autor citado, significa “aprender a andar de bicicleta” apenas por meio da observação e das informações que são apresentadas. Contudo, isso não é suficiente. Para realmente aprender a andar de bicicleta é necessário montar e andar na bicicleta, aprendendo com os possíveis erros e acertos.

Para uma atividade ser considerada investigativa na Matemática, deve contemplar algumas etapas que são indicadas por Góes e Góes (2015) como:

“Exploração e formulação de questões: o aluno reconhece e explora a situação-problema a ser resolvida por meio da formulação de questionamentos.

Realização de conjecturas: o estudante organiza os dados do problema e formula novas afirmações sobre dada conjectura.

Realização de testes e verificação da precisão das conjecturas: o aluno aplica suas afirmações e avalia se suas conjecturas estão bem definidas ou se é preciso refiná-las.

Elaboração das justificativas e avaliação da resolução: o aluno pode verificar o raciocínio utilizado.” (GÓES e GÓES, 2015, p. 107)

Nessa metodologia de trabalho, é necessário que o professor planeje sua atividade e reflita sobre as possíveis estratégias de resolução das atividades propostas aos seus alunos. É necessário verificar se o proposto está adequado ao nível de ensino em que os alunos se encontram, ou seja, não é uma tarefa fácil.

Em uma atividade investigativa podem surgir diversos caminhos que levarão os alunos a buscar o conhecimento que, talvez, esteja além do planejado pelo professor. No entanto, à medida que o educador utiliza a investigação matemática em sala de aula, ela se torna uma metodologia facilitadora para que os alunos solucionem as atividades com menos dificuldades.

Dentre os recursos que podem ser utilizados nas atividades investigativas estão os elementos da Expressão Gráfica. Dentre estes elementos, estão os materiais manipuláveis.

Muitos são os materiais manipuláveis utilizados na matemática, com diversos trabalhos apresentados na literatura. A saber, alguns destes são geoplano (SCOLARO, 2005; MAGRI, 2011), sólidos geométricos (BARBOSA, 2003; LIMA; LUZ; GÓES, 2013), tangram (GÓES *et al.*, 2009; TELLES; GÓES; GÓES, 2011), pipas (GÓES; GÓES, 2013), entre outros, que evidencia os materiais manipuláveis como um recurso facilitador no processo de ensino-aprendizagem.

O material manipulável é considerado um elemento da Expressão Gráfica por diversos pesquisadores deste campo de estudo, principalmente pelo fato da extrema importância para o desenvolvimento do processo de visualização do aluno (GÓES,

2013). Ainda, Nacarato (2005) informa que, com esses materiais, é possível a construção de imagens, sejam mentais ou concretas, fazendo com que o conceito matemático tenha significado para o aluno e deixe de ser abstrato.

Segundo Nacarato (2005, p. 3), os materiais manipuláveis são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”.

Este tipo de material deve servir como parte da construção do conhecimento do aluno, pois, segundo Lorenzato (2006), o material didático se revela com maior potencialidade a partir do momento em que é construído pelos próprios alunos durante as atividades, levando o aluno a especular e descobrir novos métodos para soluções durante a construção do material. Ainda, Góes e Góes (2015) informam que muitos desses materiais podem ser levados à sala de aula pelo professor para que os alunos, por meio da manipulação, construam o conhecimento desejado.

Quando o professor faz a escolha da utilização do material manipulável, ele está incentivando o ensino e aprendizado de seus alunos e, ao mesmo tempo, facilitando a compreensão do conteúdo da matemática a ser trabalhado. Isto faz com que a disciplina de matemática não seja vista como uma disciplina de difícil compreensão.

“Para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD [material didático] mais conveniente à aula.” (LORENZATO, 2006, p. 18)

Góes e Góes (2015) afirmam que os materiais manipuláveis podem ser classificados como estáticos ou dinâmicos, onde

“a primeira categoria [estáticos], como a própria classificação indica, não permite que sua forma seja modificada, possibilitando apenas sua manipulação. Já na segunda categoria [dinâmicos], podemos alterar a forma do material por meio de sua utilização”. (GÓES e GÓES, 2015, p. 26)

Segundo Januário (2008), como exemplos de materiais manipuláveis estáticos tem-se os instrumentos de trabalho: giz; quadro de giz; compasso; régua e outros; ilustrações: mapas; cartazes; filmes; desenhos e outros; e materiais de análise: jogos de tabuleiro; modelos geométricos, ábacos e outros.

Como exemplos de materiais manipuláveis dinâmicos, Góes e Góes (2015) citam os experimentais: *softwares* de geometria dinâmica; aparelhos para revolução de

sólidos e demonstração dos teoremas, entre outros; ou informativos: páginas da Internet, revistas, jornais, livros didáticos ou paradidáticos e outros.

Pelas indicações supramencionadas, percebe-se que a lista de materiais manipuláveis no ambiente escolar é imensa. Com alguns deles (material dourado, ábaco, jogos, Tangram, disco de frações e outros) pode-se trabalhar a Expressão Gráfica e outros são a própria Expressão Gráfica (obras de arte, modelos de sólidos geométricos, maquete, material informativo/ilustrativo, geoplano e outros).

Dessa forma, nas práticas pedagógicas que são apresentadas a seguir foram utilizados a Tendência em Educação Matemática “Atividades Investigativas” com o auxílio de Materiais Manipuláveis. Cabe ressaltar que os materiais foram disponibilizados para os alunos durante toda a experimentação, seguindo as orientações de Matos e Serrazina (1996). Estes autores realizam críticas aos docentes que utilizam os materiais manipuláveis apenas na introdução de assuntos e depois os esquecem, continuando o conteúdo em um nível abstrato.

### **3 A Expressão Gráfica no ensino e aprendizado de Matemática**

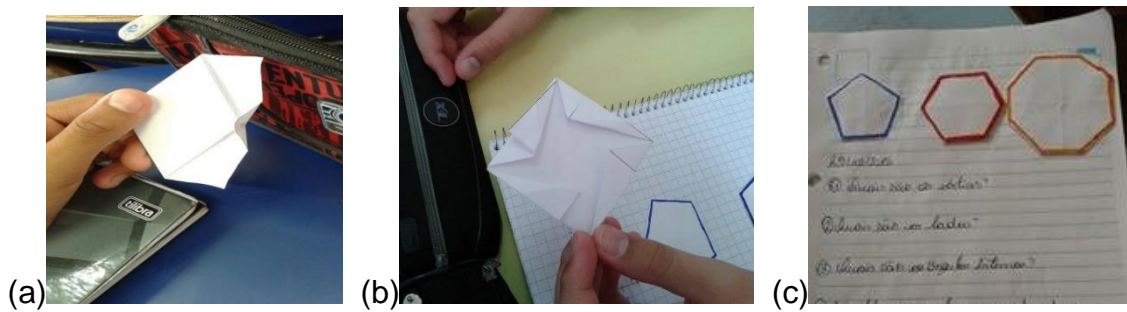
Nesta seção, são apresentadas quatro práticas pedagógicas desenvolvidas no PIBID/UFPR – Subprojeto Matemática 3, que possui a finalidade de verificar que os elementos da Expressão Gráfica são recursos facilitadores no ensino da Matemática.

Todas as atividades possuem como fundamentação as considerações relatadas na seção anterior, ou seja, são atividades investigativas e utilizam de materiais manipuláveis para sua execução.

#### **3.1 Estudo de polígonos**

Esta prática foi composta de quatro etapas e realizada na Escola Municipal Coronel Durival de Britto e Silva, Curitiba/PR, com alunos do 8º ano em 2015. A finalidade foi abordar o conceito de “polígonos”, bem como de outros relacionados, tais como “diagonais de polígonos”, “ângulos internos e externos”, além da construção de fórmulas matemáticas a partir da análise e da observação dessas figuras. Para isso, foi necessária a utilização de elementos da Expressão Gráfica a fim de que pudessem facilitar a visualização e a formalização dos conceitos.

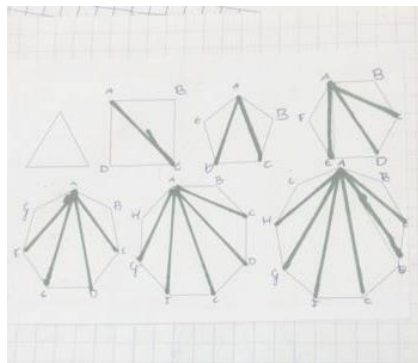
Na primeira etapa, optou-se por construir alguns polígonos utilizando dobraduras. Cada aluno recebeu três pedaços de papel, sendo que cada pedaço foi destinado à confecção de um polígono, conforme orientações passadas pelo aplicador. Foram construídos um pentágono, um hexágono e um octógono (Figura 1).



**Figura 1** – (a) Aluno construindo um pentágono; (b) Aluno construindo um octógono; (c) Polígonos construídos por um aluno.

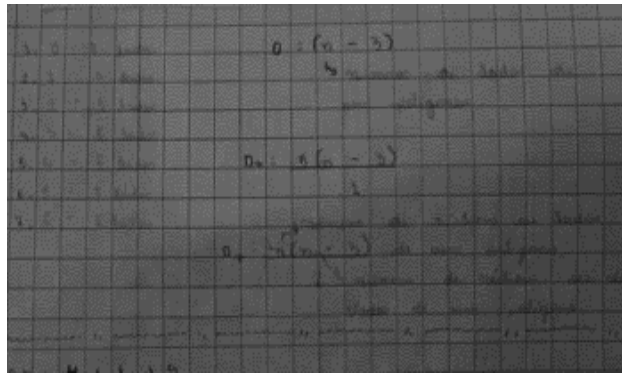
A partir dessas dobraduras e de definições apresentadas previamente, os alunos foram levados a identificar os elementos de um polígono (vértices, lados, ângulos externos e internos) classificando-os em convexo e não convexo e, também, sua classificação conforme o número de lados.

Na segunda etapa foi abordado o conceito de “diagonais do polígono”. Para isso, foi entregue aos alunos a imagem impressa de vários polígonos nos quais eles deveriam traçar linhas retas de um vértice a outro (não consecutivo), de modo que todas as linhas traçadas partissem de um mesmo vértice. (Figura 2).



**Figura 2** – Diagonais traçadas por um aluno.

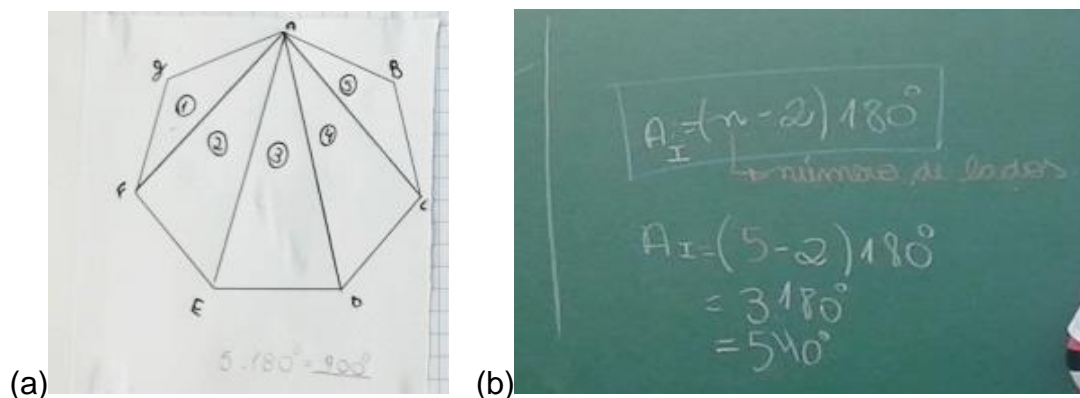
Depois disso, o objetivo era construir uma fórmula que permitisse calcular a totalidade de diagonais de cada polígono. Essa fórmula deveria ser aplicada a todos os polígonos, inclusive aos que não estavam representados no papel. Essa construção foi feita coletivamente, conforme indagações do aplicador e dos alunos acerca das figuras que tinham em mãos. Chegou-se, então, à fórmula do número de diagonais de um polígono. Essa fórmula teve de ser verificada nas figuras que cada aluno continha para que se verificasse a sua validade (Figura 3).



**Figura 3** – Fórmulas desenvolvidas coletivamente com os alunos.

Na terceira etapa, o objetivo foi construir uma fórmula que permitisse calcular a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. Para isso, foi entregue uma figura de um heptágono regular (também poderiam ser figuras diferentes, de outros polígonos) para cada aluno. O heptágono deveria ser dividido em triângulos traçados a partir do mesmo vértice. Nos anos anteriores, os alunos já haviam trabalhado com a soma dos ângulos internos do triângulo, por isso, não foi necessária uma nova explicação.

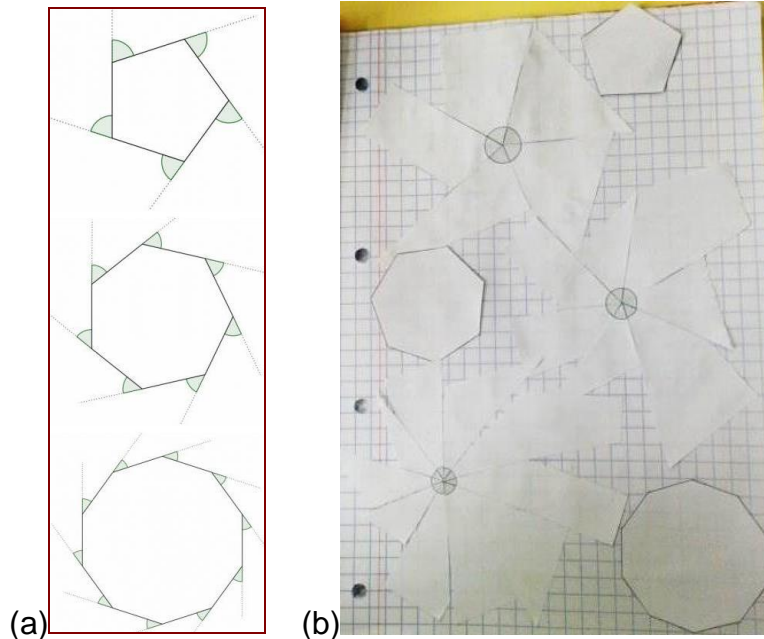
Desse modo, para se determinar a soma dos ângulos internos de um polígono, bastava multiplicar  $180^\circ$  pela quantidade de triângulos formados na figura. Para calcular a soma dos ângulos internos de outros polígonos, que não estavam desenhados ou decompostos em triângulos, chegou-se à conclusão de que a quantidade de triângulos dentro de um polígono é de  $n-2$ , onde  $n$  representa o número de lados dos polígonos. Com isso, chegou-se à fórmula, conforme objetivo da atividade (Figura 4).



**Figura 4** – (a) Heptágono decomposto em triângulos; (b) Construção da fórmula.



Por fim, na quarta etapa, o objetivo foi trabalhar com a soma dos ângulos externos. Para isso, foram entregues aos alunos três polígonos diferentes, nos quais estavam destacados os seus ângulos externos. Os alunos deveriam recortar e colar esses ângulos, buscando formar um círculo, de modo a se verificar que a soma destes seria sempre  $360^\circ$  (Figura 5).



**Figura 5** – (a) Polígonos entregues aos alunos; (b) Junção dos ângulos externos formando  $360^\circ$ .

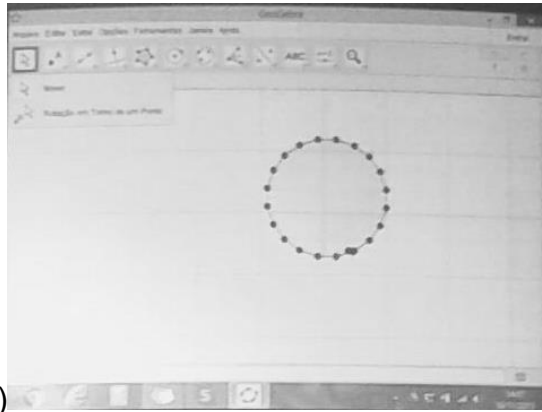
Ao término dessas quatro etapas, foi proposta uma aula de exercícios, na qual os alunos puderam verificar os conhecimentos adquiridos ao longo do estudo de polígonos. Nesta aula, priorizaram-se exercícios de interpretação.

Foi também destinado um tempo para apresentar aos alunos os polígonos com mais de 15 lados, que foram construídos no Geogebra, *software* de geometria dinâmica ([www.geogebra.org.br](http://www.geogebra.org.br)). Essas construções foram projetadas na sala de aula, destacando polígonos convexos e não convexos, e observando que quanto maior a quantidade de lados de um polígono regular, mais próximo ele estará de uma circunferência (Figura 6).

O que se pode perceber com a aplicação desta prática foi o fato de os alunos compreenderem os conceitos matemáticos envolvidos em cada atividade, uma vez que as investigações matemáticas, por meio dos materiais manipuláveis, proporcionaram aos alunos a vivência com os conceitos abordados.



(a)



(b)

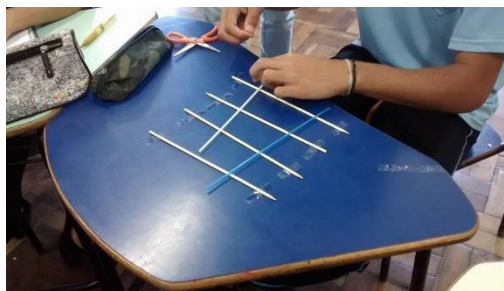
**Figura 6** – (a) Resolução de exercícios; (b) Polígono regular de 20 lados construído no Geogebra.

### 3.2 Semelhança de triângulos

A proposta de atividade sobre semelhança de triângulos foi desenvolvida com alunos de duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, na Escola Municipal Coronel Durival Britto e Silva, no ano de 2015.

Os materiais utilizados na execução dessa proposta foram palitos de madeira, canudos de plástico, fita adesiva e folhas de papel. A manipulação desse material teve como objetivo colocar em prática conhecimentos do campo de estudos Expressão Gráfica, onde foram utilizados para apresentar, representar, analisar e formalizar conceitos.

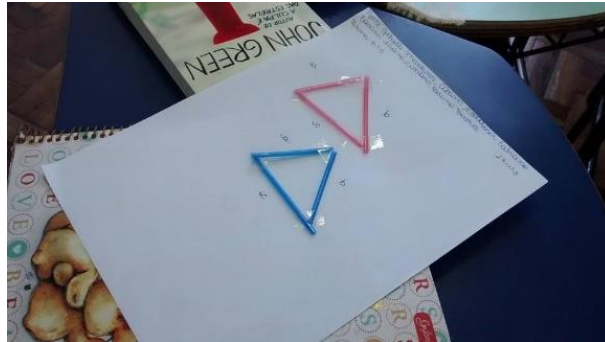
Na primeira etapa da atividade, os alunos colaram na carteira (para não haver mobilidade que prejudicaria na precisão) os palitos de madeira dispostos paralelamente e os canudos de plástico dispostos transversalmente (Figura 7).



**Figura 7**– Construção do Teorema de Thales.

Na Figura 7, os palitos e os canudos representaram retas em um esquema que pudesse recuperar o conceito do Teorema de Thales, exposto no quadro de giz antes da colagem.

Posteriormente, os canudos foram cortados nas intersecções com o objetivo de formar "triângulos semelhantes", conceito compreendido com relativa facilidade pelos alunos, que consiste em triângulos com o mesmo formato, apesar de terem tamanhos diferentes (Figura 8).



**Figura 8** - Construção dos triângulos semelhantes.

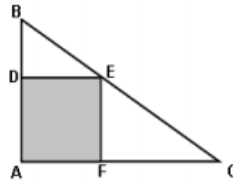
Algumas proporções com base nessas representações foram expostas no quadro de giz, e outras proporções foram acrescentadas pelos alunos em suas anotações individuais.

Na segunda etapa, com o objetivo de verificar o nível de compreensão dos alunos a respeito da semelhança de triângulos e do uso do Teorema de Thales, foram realizados dois exercícios. O primeiro solicitou o cálculo da altura de um prédio, sendo resolvido com relativa facilidade. Porém, o segundo exercício, mais elaborado, exigiu auxílio dos aplicadores e do professor regente à maioria dos alunos.

Esse exercício, considerado mais difícil, apresentava um triângulo retângulo com um cateto medindo 2 cm e outro medindo 6 cm. Dentro desse triângulo havia um quadrado com um dos ângulos de  $90^\circ$  sobreposto ao ângulo de  $90^\circ$  do triângulo, estando os dois lados do quadrado, que formavam esse ângulo, sobrepostos aos catetos. O quadrado possuía o tamanho necessário para que um dos vértices estivesse na hipotenusa. Assim, perguntava qual a medida do lado do quadrado (Figura 9).

A dificuldade para a resolução do segundo exercício ocorreu em razão de a maioria dos alunos não ter assimilado previamente conhecimentos a respeito de figuras geométricas e soma de segmentos. Apesar disso, o objetivo de conceituar "Semelhança de Triângulos" foi atendido, pois os alunos compreenderam que os triângulos ABC, FEC e DBE eram semelhantes.

Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, o segmento AB possui medida igual a 2cm e o segmento AC possui medida igual a 6cm. Quanto mede o lado do quadrado ADEF?



**Figura 9** - Segundo exercício proposto.

No decorrer dessas duas atividades foi notória e significativa a participação dos alunos, que demonstraram interesse na resolução, realizando questionamentos e sugestões. Nesse percurso, as atividades investigativas por meio de materiais manipuláveis permitiram que se rompesse o padrão tradicional de “definição – exemplo – exercício” e tornasse os alunos coautores do processo de conhecimento. Esses elementos da Expressão Gráfica nas atividades funcionaram como facilitadores do processo de ensino-aprendizagem, possibilitando maior interação entre o aluno e o conteúdo, e permitindo a visualização dos conceitos abordados.

### 3.3 Estudo de Pirâmides

Esta atividade foi aplicada no Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli aos alunos do 2º ano em uma turma do Ensino Médio. Foi desenvolvida como forma facilitadora no processo de ensino-aprendizagem do conceito de Pirâmides, cálculo de seu volume e outros conceitos relacionados a pirâmides.

A atividade teve início com a seguinte pergunta realizada aos alunos: O que vocês pensam quando é falado em pirâmides? Inicialmente, os alunos se mantiveram em silêncio, mas, com alguns incentivos, começaram a falar sobre as pirâmides do Egito.

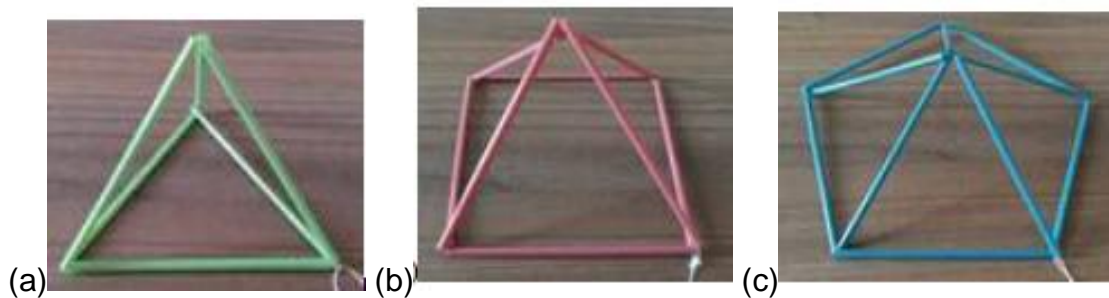
Com esta fala, foi solicitado que discursassem mais sobre o assunto, principalmente em relação aos lados e à base da pirâmide. Partindo do conhecimento prévio dos alunos, foi introduzido um pouco da história da matemática, mencionando as pirâmides do Egito.

Perguntando sobre o tipo de base das pirâmides do Egito, os alunos souberam responder que são quadradas ou retangulares. Disto, foi informado e mostrado (por meio de imagens) que elas possuem quatro faces triangulares que tendem a um ponto em comum. As três pirâmides historicamente mais importantes foram construídas

como tumbas reais para Quéops, Quéfren, e Miquerinos – nome de três gerações (pai, filho e neto). A maior delas, chamada de Grande Pirâmide do Egito, tem, aproximadamente, 150 m de altura e todos os quatro lados são praticamente do mesmo comprimento, e foi construída cerca de 2550 a.C. para Quéops.

Este breve apanhado histórico foi realizado para situar os alunos quanto à construção de pirâmides por povos antigos e, ao mesmo tempo, mostra a importância da matemática na história das civilizações. Em seguida, os alunos foram organizados em equipes para desenvolver a atividade proposta.

Cada equipe foi composta de, no máximo, três alunos e foi solicitado que construíssem três tipos de pirâmides: uma com base triangular, uma de base quadrada e outra com base pentagonal (Figura 10). Para isso, os alunos deveriam utilizar um fio e canudinhos de plástico.



**Figura 10** - a) Pirâmide de base triangular; b) Pirâmide de base quadrada; c) Pirâmide de base pentagonal.

Na turma em que foi desenvolvida a aplicação da proposta, o professor regente, que também é o supervisor do subprojeto do PIBID, já realiza uma metodologia diferenciada trabalhando com atividade em grupo e na forma de estudo dirigido. Desta forma, os alunos já estavam acostumados com trabalhos em grupo, talvez a grande participação e colaboração na atividade se deva a este fato.

Com as pirâmides construídas foram abordados os elementos e propriedades destes sólidos. Ao concluir esta etapa, pode-se afirmar que os alunos possuem dificuldades com o vocabulário matemático como, por exemplo, letras gregas. A partir dessa dificuldade, foi necessária a adequação da linguagem matemática à medida que se utilizavam as definições com a finalidade de aproximar os termos aos conhecimentos prévios dos estudantes. Após as definições, foi apresentado o cálculo de áreas e apótemas, com exemplos em cada caso.

Na Educação Básica, os estudantes aprendem que o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. No entanto, a verificação disto raramente é apresentada pelos docentes. Então, o estudo das pirâmides prosseguiu na verificação da visualização desta informação.

Com isso, foram construídos, com papel cartão, um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura (Figura 11) e os estudantes foram questionados sobre quantas pirâmides “cabiam” dentro do prisma.



**Figura 11** - a) Pirâmide de papel cartão b) Prisma de papel cartão.

Após este questionamento foi iniciado o experimento despejando arroz dentro da pirâmide, e, da pirâmide, transferido diretamente para o prisma, fazendo esta sequência por três vezes. Por meio desse procedimento, os alunos puderam perceber que dentro de um prisma “cabem” três pirâmides e, assim, compreender a fórmula do volume (Figura 12) .



**Figura 12** - Experimento do volume.

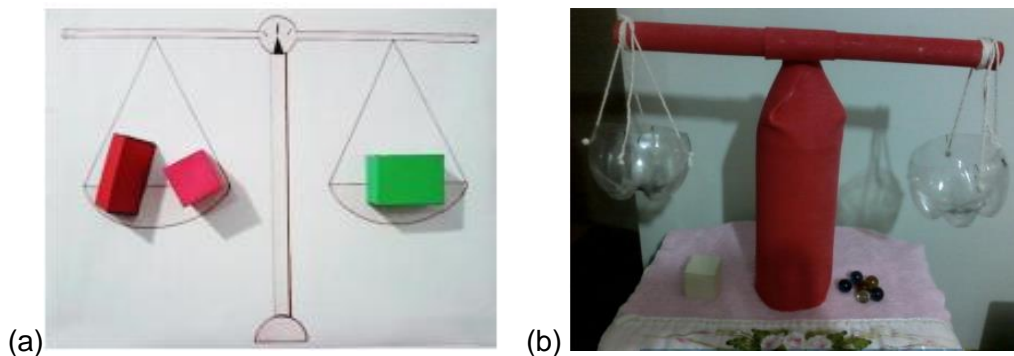
Na sequência, como forma de verificação da compreensão dos conceitos trabalhados com os alunos, eles desenvolveram algumas atividades, dentre elas, uma que solicitou o preenchimento de uma tabela na qual poderia ser utilizada a pirâmide construída para o auxílio. Desta forma, o propósito foi verificar os elementos e fazer relações. Para concluir a atividade, foi realizada uma avaliação, em que o propósito não era somente avaliar a compreensão dos alunos, mas sim, a atuação do bolsista do PIBID em sua futura profissão.

Pela experimentação em sala de aula, pode-se afirmar que, na proposta realizada, o uso da investigação matemática e do material manipulado foi o fator primordial para a compreensão dos conceitos. Com eles, os alunos puderam experimentar a matemática que, muitas vezes, é desenvolvida, em todos os seus níveis, de forma abstrata.

### 3.4 Equações do 1º grau

Esta prática, envolvendo os conceitos de equação do 1º grau, foi desenvolvida com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Padre Cláudio Morelli.

Foram dois os materiais utilizados. Em uma das turmas (Turma A), foi utilizada uma balança, ilustrada em cartolina, e, também, sólidos geométricos confeccionados em papel tipo cartolina (Figura 13a). Em outra turma (Turma B) foi utilizado um material desenvolvido com garrafa e cano de plásticos (Figura 13b).



**Figura 13** - a) Balança ilustrada em cartolina; b) Balança confeccionada com garrafa e cano de plásticos.

O objetivo da escolha destes materiais foi o de desenvolver nos alunos noções de equilíbrio, apresentando situações do cotidiano nas quais é necessário utilizar tal conceito matemático e realizar interação dos alunos com a aula.

Na Turma A, os exemplos foram trabalhados por meio desta ilustração, ou seja, utilizou-se de desenho bidimensional e sólidos geométricos. A representação das massas foi realizada com pirâmides e paralelepípedos com o objetivo de resgatar conteúdos da geometria espacial, estimulando a observação de características das figuras tridimensionais e bidimensionais, questionando sobre propriedades e estabelecendo classificações. Desta forma, pode-se mostrar que não é necessário

destinar períodos específicos do planejamento para trabalhar com alguns conceitos específicos da geometria.

Para confeccionar o material foram utilizados: uma cartolina, lápis de cor, cola e papel de várias cores. Para elaborar a balança foi realizada uma impressão de uma balança em uma folha A4 e, em seguida, esta foi reproduzida em uma cartolina manualmente (Figura 13a).

Esta ilustração foi utilizada da seguinte forma: dois alunos colavam os sólidos na balança, que estava presa ao quadro negro, e escolhiam um valor para um dos sólidos, enquanto o outro sólido possuía valor abstrato. Desta forma, o desafio proposto era que o restante da turma encontrasse o valor não informado. Esse procedimento foi repetido diversas vezes até a compreensão do conceito.

Na Turma B, foi decidido confeccionar uma balança de pratos para a compreensão do equilíbrio e, por consequência, do conceito matemático de equação de 1º grau.

Ao apresentar o material aos alunos, foi perguntado o que eles estavam visualizando e a resposta foi “uma balança”. Com isso, os alunos foram questionados quanto à função dela, e responderam “pesar”. No entanto, um dos alunos respondeu que “serve para observar a quantidade que temos em cada lado da balança”.

Diante desta resposta, os alunos foram questionados “Vocês concordam que se colocarmos algo em um dos pratos, teremos que ter a mesma massa no outro prato para haver o equilíbrio?”. A resposta dos alunos foi afirmativa: “Sim”.

Assim, alguns objetos foram tomados (cubos e bolas de gude) para realizar a atividade. Cabe informar que a massa de cada cubo é igual ao dobro da massa de cada bola de gude.

Em um prato, foram colocados um cubo e duas bolas de gude. No outro prato, foram colocadas quatro bolas de gudes. Com isso, a balança ficou equilibrada.

Diante desta situação, foi perguntado aos alunos o significado daquele equilíbrio, onde uma aluna respondeu que o equilíbrio pode significar uma igualdade que poderia ser escrita como  $\square + 2 = 4$ .

Na sequência, foi perguntado como poderia-se determinar a massa do cubo e, dentre as sugestões, indicaram que fossem retiradas, de cada prato, duas bolas de gudes. Realizado isto, os alunos determinaram que a massa de um cubo é igual ao dobro da massa de uma bola de gude.

A demonstração matemática é apresentada na Figura 14. Para manter o equilíbrio na igualdade, subtrai-se de cada membro da mesma, valores iguais, neste caso 2.



$$\begin{aligned} \square + 2 &= 4 \\ \square + 2 - 2 &= 4 - 2 \\ \square &= 2 \end{aligned}$$

**Figura 14** – Demonstração matemática.

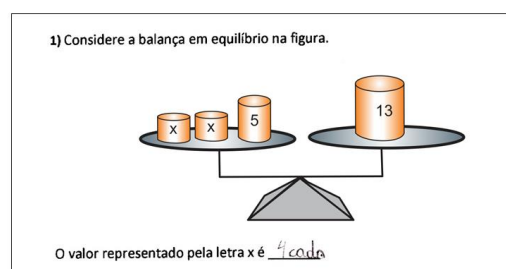
Neste exemplo, apresenta-se a forma correta de resolução de uma equação do 1º grau, confrontando o “macete” que muitos professores insistem em informar aos alunos “o número 2 passa para o outro lado trocando o sinal”. O macete apresentado por muitos induz o aluno ao erro, visto que quando se tem uma operação de multiplicação e divisão os estudantes tentam aplicar tal “regra” e erram seus cálculos, uma vez que “passaria o 2 trocando de sinal”, esquecendo da operação aritmética.

Diversos exemplos utilizando os materiais foram utilizados nas duas turmas até que a compreensão da equação do 1º grau ocorresse de forma satisfatória.

Após este momento, foram aplicadas algumas atividades semelhantes, num total de cinco questões (algumas com subitens) que deveriam ser resolvidas em grupos de cinco alunos. Durante a aplicação destas atividades, os alunos puderam manusear os materiais utilizados para exemplificação do conceito de equação do 1º grau.

A justificativa para as atividades serem realizadas em grupo é a interação entre os alunos, promovendo a socialização e a melhoria do rendimento escolar, uma vez que um aluno poderia também sanar as dúvidas de outro, além do auxílio docente. A seguir, são apresentadas algumas das questões desenvolvidas com os alunos, realizando breve análise dos resultados da aplicação:

A primeira questão continha a equação  $2x + 5 = 13$ , ilustrada em uma balança com pesos distribuídos da seguinte forma: i) no prato da esquerda da balança há dois pesos de  $x$ Kg e um peso de 5Kg; ii) no prato da direita há um peso de 13Kg (Figura 15).



**Figura 15** - Questão 01 – resolvida pelo grupo “A” – turma A.

Nessa questão, os alunos não apresentaram muita dificuldade quanto ao conteúdo, mas sim, quanto à matemática básica, ou seja, havia uma grande dificuldade em subtrair, multiplicar e dividir. Além disso, os estudantes tratavam números negativos do mesmo modo que os positivos. Percebendo essa dificuldade, foi necessário retomar essas operações com números inteiros para dar continuidade à atividade.

Na questão 03, foi observada uma situação semelhante, porém, ao invés de latas, encontram-se garrafas. De um lado da balança tem-se oito garrafas e um bloco de 2kg, já do outro lado havia três garrafas e três blocos (Figura 16).

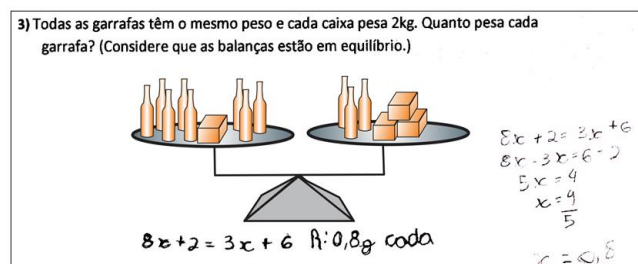


Figura 16 - Questão 03 – resolvida pelo grupo “A” – turma A.

Aqui houve algumas dificuldades para determinar a equação  $8x + 2 = 3x + 6$ , pois alguns grupos não multiplicaram o número de blocos pela massa de cada um (no enunciado constava que cada bloco tinha massa de 2kg). Após questionamentos realizados pelos aplicadores, a equação foi construída corretamente.

Na questão 04 os estudantes se depararam com pesos e blocos. Nos blocos havia a indicação que suas massas eram  $m$ . Nesta atividade, em um prato da balança constam seis blocos e um peso de 10g, no outro lado são quatro blocos e um peso de 50g. A mudança de variável foi realizada para que os alunos não associassem o conteúdo somente à incógnita  $x$  (geralmente apresentado desta maneira nos livros didáticos) (Figura 17).

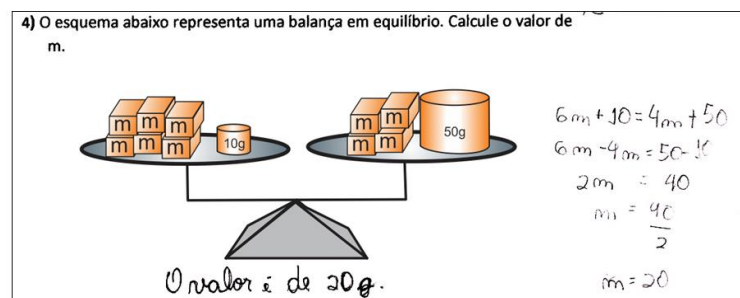


Figura 17 - Questão 04 – resolvida pelo grupo “C” – turma B.

Os grupos determinaram corretamente a equação  $6m + 10 = 4m + 50$ , mesmo com a troca de nomenclatura das variáveis. Este fato mostra que houve abstração e não associação da variável ao conceito matemático.

Em relação a esta atividade, pode-se concluir que as atividades investigativas e o material manipulável utilizado foram suficientes para a compreensão do conceito de funções de primeiro grau e sua resolução.

#### 4 Considerações Finais

Ao realizar a análise das atividades desenvolvidas, não se esperam resultados numéricos, mas sim, de atitudes frente à compreensão dos alunos da Educação Básica e, sobretudo, na mudança de atitude dos futuros profissionais da educação, visto que estas atividades foram aplicadas por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UFPR, participantes do PIBID. Estes acadêmicos tiveram a oportunidade de abordar conceitos de formas diferenciadas daquelas que muitos docentes de matemática utilizam e que tornam os conceitos abstratos: o professor replica em quadro negro os conceitos escritos em folhas já amareladas escritas/planejadas há muitos anos (GUÉRIOS, 2002).

As atividades apresentadas estão em consonância com as afirmações de Morin (2010), de que professores e alunos precisam trabalhar juntos na compreensão dos conceitos, que cada indivíduo no processo de ensino-aprendizagem deve andar um ao lado do outro, ou seja, um deve ouvir o outro. Durante o desenvolvimento pode-se perceber as atitudes dos alunos em relação à sua aprendizagem, por consequência, a compreensão dos conceitos. Esta evidência se deu por meio das mediações, onde um novo tópico foi abordado somente após a compreensão do conceito anterior pelos estudantes envolvidos. Este fato só foi possível, pois os mediadores (acadêmicos da UFPR) e alunos da Educação Básica andaram juntos na construção dos conceitos matemáticos abordados.

Nesta forma de abordagem, percebe-se que os materiais utilizados concordam com as afirmações de Nacarato (2015), Lorenzato (2006) e Góes e Góes (2015), que as atividades investigativas por meio de materiais manipuláveis proporcionam visualidade aos conceitos desenvolvidos, uma vez que os mesmos deixam de ser apenas imaginados (abstratos) e tomam forma. Isto corrobora com as afirmações de Luz (2004), de que a melhoria da qualidade do ensino passa pela formação inicial dos professores e novos paradigmas educacionais intimamente ligados, formando uma teia de inter-relações que não podem ser analisadas separadamente.

Os materiais manipuláveis ajudaram a materializar/visualizar conceitos, que com o auxílio das atividades investigativas, tornaram os alunos “verdadeiros matemáticos”, pois os estudantes realizaram questionamentos, experimentos e análise sobre o que estavam observando. Desta forma, o objetivo principal de cada atividade, que consistia na compreensão dos conceitos matemáticos, foi alcançado. Ainda, a participação dos alunos nas atividades foi verificada de forma esperada, uma vez que estes contribuíram e buscaram a construção de seu conhecimento, papel principal das atividades investigativas (Brocardo, Oliveira e Ponto, 2005).

É necessário observar que a construção de poucos materiais para cada turma tornou o trabalho um pouco exaustivo, no entanto, os estudantes compreenderam a limitação da utilização dos materiais. Este fato poderia ter sido solucionado se as instituições parceiras possuíssem materiais semelhantes ou fosse possível armazená-los em locais como laboratórios de matemática. Ou seja, por mais que as instituições de Educação Básica não possuam ambientes adequados para a construção do conhecimento, cabe ao professor proporcionar, dentro de suas limitações, metodologias que contribuam com o ensino e aprendizado.

Por fim, pode-se afirmar que a Expressão Gráfica, por meio dos materiais manipuláveis, foi de fundamental importância, visto que seus elementos contribuíram para a compreensão dos conceitos matemáticos desenvolvidos.

### **Agradecimentos**

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

### **Referências**

BARBOSA, Paula Márcia. **O Estudo da Geometria**. Revista Benjamin Constant, 2003.

BRAUMANN, Carlos. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. (Eds.). *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

BROCARD, João; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

GÓES, Anderson Roges Teixeira Góes; GÓES, Heliza Colaço. **Ensino da Matemática: concepções, metodologias, tendências e organização do trabalho pedagógico**. Curitiba: Editora InterSaberes, 2015.

GÓES, Anderson Roges Teixeira; GÓES, Heliza Colaço. **A Expressão Gráfica por meio de pipas na Educação Matemática**. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM*. Curitiba/PR, 2013.

GÓES, Anderson Roges Teixeira; SCHMIDT, Andréia; COSTA, Bruno Ribeiro; LABADIE NETO, Eusebio; SOUSA, Julio Eduardo Anacleto; OLIVEIRA, Thiago Flávio Rodrigues. **Tangram: Uma metodologia de ensino na disciplina de matemática do Ensino Médio**. In: *IXX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico - VIII Internacional Conference on Graphics Engineering for Arts and Design - GRAPHICA 2009*. Bauru/SP, 2009.

GÓES, Heliza Colaço. **Um esboço de conceituação sobre Expressão Gráfica**. Revista Educação Gráfica. vol. 17, no. 1, Bauru/SP, 2013.

GUÉRIOS, Ettiène Cordeiro. **Espaços oficiais e intersticiais da formação docente: histórias de um grupo de professores na área de ciências e matemática**. Tese (Doutorado em Educação – Universidade Federal do Paraná). Curitiba, 2002.

JANUÁRIO, Gilberto. **Materiais manipuláveis: mediadores na (re)construção de significados matemáticos**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Guarulhos, 2008.

LIMA, Rafael Telma; LUZ, Adriana Augusta Benigno dos Santos; GÓES, Anderson Roges Teixeira. **Poliedros estrelados: o estudo dos sólidos geométricos além dos livros didáticos**. In: *In: XXI Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico - X Internacional Conference on Graphics Engineering for Arts and Design - GRAPHICA 2013*. Florianópolis/SC, 2013.

LORENZATO, Sergio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUZ, Adriana Augusta Benigno dos Santos. **A (re)significação da geometria descritiva na formação profissional do engenheiro agrônomo**. Tese (Doutorado em Agronomia– Universidade Federal do Paraná). Curitiba, 2004.

MAGRI, Adriana Itala. **Avaliação do Ensino-aprendizagem por Meio do Material Concreto Geoplano: um estudo de caso com alunos do 6º do Ensino Fundamental**. Revista Visão Acadêmica; Universidade Estadual de Goiás, 2011.

MATOS, José ; SERRAZINA, Maria de Lourdes. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MORIN, Edgar. **Ciência com consciência**. 14. Ed. Rio de Janeiro: Bertrand, 2010.

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto**. Revista de Educação Matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Ano 9, n 9-10, 2005.

SCOLARO, Maria Angela. **O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** Universidade Tecnológica do Paraná. Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná, 2008.

TELLES, Luciane Souza de Jesus; GÓES, Heliza Colaço; GÓES, Anderson Roges Teixeira. **A Geometria por meio de dobraduras na construção do Tangram.** In: *XX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico - IX Internacional Conference on Graphics Engineering for Arts and Design – GRAPHICA 2011.* Rio de Janeiro/RJ, 2011.