TRAJETÓRIA HISTÓRICA DOS LUGARES GEOMÉTRICOS

Gilson Braviano*
gilson@cce.ufsc.br

INTRODUÇÃO

Mesmo sendo escassas as fontes para o estudo das civilizações antigas, existem registros datados do período entre 20.000 e 10.000 anos antes da era cristã que indicam o uso da contagem no continente africano. No *papiro de Ahmes*, de aproximadamente 1.550 a.C., mensurações de triângulos e retângulos foram realizadas. Do mesmo modo, na China e na Índia, mil anos antes de Cristo, a Geometria também deixava seus primeiros registros [1].

Mais recentemente, datando do século IV a.C., as Matemáticas mesopotâmica e egípcia deixaram legados, sendo os primeiros mais numerosos, devido à maior facilidade de preservação da argila que do papiro. Esses povos realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, sendo os problemas geométricos transformados em problemas numéricos [2]. A Matemática mesopotâmica parece ter desaparecido por volta da mesma época dos primeiros registros da Matemática grega que chegaram até nós. Não há, entretanto, evidências seguras que permitam estabelecer uma continuidade entre estas, sendo mais coerente identificar a presença de diferentes práticas em locais distintos [3]. Mesmo que a ideia de demonstrar proposições descobertas de forma intuitiva tenha aparecido nos ensinamentos de Thales, por volta de 600 a.C., considera-se a obra *Elementos*, escrita por Euclides, aproximadamente no terceiro século antes da era cristã, como o primeiro passo no sentido de criar um molde dedutivo à Matemática. A partir deste momento, passou-se a utilizar enunciados geométricos gerais que não envolviam somente procedimentos de medida.

Nos *Elementos* (conjunto de treze livros dos quais não há registros da versão original, somente edições e traduções tardias), as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e circunferências[1] definidas de modo abstrato. Ressalta-se que Euclides não afirmou explicitamente, em qualquer lugar de sua obra, que as construções devessem ser efetuadas somente com régua e compasso [3]. Uma das explicações para o uso destes instrumentos pode ser porque as construções feitas desse modo são mais simples e não exigem teoria adicional. Após todo o esforço grego, houve uma lacuna histórica no desenvolvimento da Geometria, entre o século III a.C. (quando viveu Euclides) e o século XV da era cristã (quando a Matemática voltou a se desenvolver na Europa), que incluiu o período designado como *Idade das Trevas*. Pode-se então estabelecer três outros marcos na história da Geometria [1], após o período centralizado na Grécia, ainda que de forma grosseira e não excludente: o nascimento da Geometria analítica, no século XVII; a aplicação do cálculo, com destaque para o período 1650-1800; e o renascimento da Geometria pura, no século XIX, caracterizado pela Geometria Descritiva de Gaspard Monge, a Projetiva de Poncelet e a transcendência para os modelos não euclidianos de Lobachevsky, Bolyai e Riemann.

Neste contexto, através da tradução, em 1588, da *Coleção Matemática* de Pappus, ressurgiu o interesse pelas construções dos gregos, chamadas de *problemas de lugares geométricos*. Tais construções foram classificadas, pelo próprio Pappus, como: problemas planos (construídos com régua e compasso), problemas sólidos

[1] Os termos circunferência e círculo aparecem em diferentes livros de forma indistinta. Optou-se, neste texto, por denominar 'círculo' a porção do plano limitada pela 'circunferência'. Assim, aquilo que Euclides denominava de 'periferia do círculo' [1], é o que chamaremos de circunferência, ou seja, o conjunto de pontos que está a uma distância dada de um ponto denominado centro.

* Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil.

(construídos por meio de cônicas) e problemas lineares (construídos usando curvas mais gerais) [3]. De caráter descritivo, esta divisão não provém do tempo de Euclides, estando explicitada em um dos *Comentários* de Pappus, datado do terceiro século da era cristã.

É, no mínimo, curioso verificar que as construções geométricas tenham permanecido imunes ao tempo, ao contrário de outros tópicos da Matemática que foram sendo continuamente modificados [4]. No Renascimento, a Geometria ainda era o principal domínio da Matemática e qualquer pessoa que quisesse aprender ciência precisava começar pelos *Elementos* de Euclides [3]. Mesmo sem a mesma importância daquela época, ainda hoje as construções geométricas realizadas por meio de régua não graduada e compasso são ensinadas em aula, sobretudo na disciplina de Desenho Geométrico e servem de suporte para conteúdos de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, por exemplo.

Neste contexto evolutivo, o advento da informática trouxe a possibilidade de trabalhar as construções de modo dinâmico, permitindo que se lance um olhar mais completo na direção dos lugares geométricos, os quais permeiam a Geometria em suas diversas vertentes. Na sequência, este texto procura enquadrar a exploração dos lugares geométricos de acordo com uma evolução histórica que envolve ensino e prática.

RESOLUÇÕES GRÁFICAS POR MEIO DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Os problemas de construções geométricas aparecem em diversos livros de Matemática, sobretudo naqueles focados em Geometria e, mais especificamente, no Desenho Geométrico. Até a década de 1960 (e em alguns livros atuais também), a forma tradicional de apresentar o conteúdo nas obras didáticas se dava pelo enunciado de um problema seguido de uma série de passos que levavam à sua resolução geométrica, conforme ilustra a Fig.1.

Apesar de levar em conta as relações geométricas entre os elementos que constituem o problema, esta forma de apresentar o conteúdo não prioriza que o aluno se posicione proativamente frente à situação dada, apenas o situa como reprodutor de uma 'receita' fornecida passo a passo.

O *Método dos Lugares Geométricos* constitui um procedimento mais natural do que o método cartesiano referido anteriormente, e permite resoluções gráficas

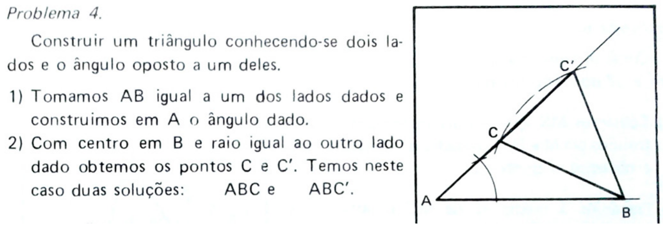
Problema 4.
Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo oposto a um deles.
1) Tomamos AB igual a um dos lados dados e construimos em A o ângulo dado.
2) Com centro em B e raio igual ao outro lado dado obtemos os pontos C e C′. Temos neste caso duas soluções: ABC e ABC′.

Fig. 1 - Passo a passo da resolução gráfica de um problema [5].

com menor esforço, a partir da construção de uma figura-piloto que contempla uma das soluções do problema [6]. Como, tradicionalmente, em Desenho Geométrico as duas únicas linhas que podem ser traçadas são a reta e a circunferência, só é possível obter pontos quando as suas propriedades determinam lugares geométricos [7]. Assim, faz-se uma figura-rascunho onde é destacada a solução procurada; pesquisam-se, nesta figura, duas propriedades desta solução; e constroem-se os lugares geométricos associados a cada uma das propriedades, estando a solução na sua interseção [8]. A Fig. 2 ilustra este método, através da construção de um triângulo a partir de três de seus elementos (lado *a*; mediana *ma* relativa a este lado; e ângulo $\hat{A}$). Na prática, o problema se reduz à determinação da posição do vértice *A*.

Neste método, onde as propriedades dos elementos que constituem a figura de análise são explicitadas por meio de sinais matemáticos (segmentos congruentes, ângulos conhecidos, paralelismos etc.), ao resolver um problema por meio de construções geométricas não há necessidade de decorar sequên-

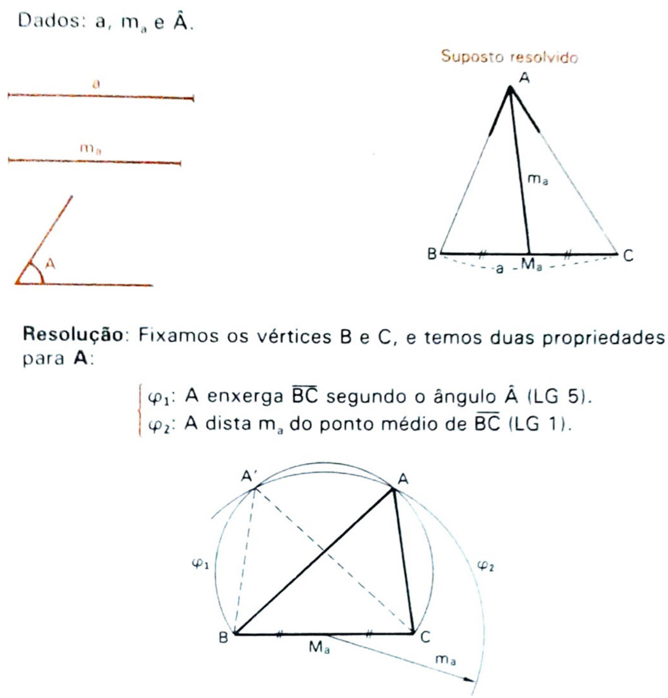

Fig. 2 - Resolução gráfica de um problema com base em dois lugares geométricos: circunferência e arco capaz [8].

cias de passos, mas sim de buscar as relações entre os elementos que constituem a figura e determinar os lugares geométricos que contêm a solução. Torna-se importante, neste momento, definir o que vem a ser um lugar geométrico.

A partir das diferentes formas como vários autores expressam o conceito, pode-se dizer que lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfaz a determinada propriedade, sendo que somente estes pontos satisfazem à referida propriedade. A circunferência de centro *P* e raio *r*, por exemplo, é o lugar geométrico dos pontos que, no plano da circunferência, se situam a uma distância *r* de *P*. Todos os pontos do interior da circunferência respectiva estão mais próximos de *P* e, do mesmo modo, todos os pontos fora do interior dessa circunferência estão mais distantes de *P*. No espaço, o mesmo lugar geométrico seria uma esfera de raio *r* centrada em *P*.

Este conceito de lugar geométrico é comumente colocado nos livros didáticos como algo pronto e acabado, desassociado das suas inúmeras aplicações e desprovido de qualquer associação histórica [9]. Uma causa disso talvez seja o fato de não se ter noção clara de quando a expressão *lugar geométrico* começou a ser usada. Como 'conjunto' e 'propriedade' são conceitos intercambiáveis, pode-se compreender um lugar geométrico como qualquer conjunto de pontos e, então, para os autores dos livros didáticos, uma alternativa foi dizer que um lugar geométrico é um subconjunto do plano definido por uma propriedade geométrica [10].

Os lugares geométricos considerados fundamentais, na maioria dos livros, são a circunferência, a mediatriz, o par de bissetrizes, o par de retas paralelas e o par de arcos capazes. Outros, entretanto, são usados com bastante frequência em situações onde problemas específicos são resolvidos.

Na seção seguinte, alguns aspectos relativos aos lugares geométricos serão abordados dentro de um contexto histórico, nos diversos períodos da Geometria, finalizando com sua representação na atualidade, a partir do movimento de um ponto, em *software* de Geometria Dinâmica.

TRAJETÓRIA HISTÓRICA DOS LUGARES GEOMÉTRICOS

Há evidências de que Euclides seja autor de outras obras além dos *Elementos*, abordando lugares geométricos e cônicas. Dos originais, porém, não nos chegou nenhum manuscrito [3]. O uso dos lugares geométricos remonta, portanto, e pelo menos, a este período. Entretanto, como grande parte do nosso conhecimento sobre a Matemática grega é indireto, deve-se ter cuidado cuidado em fazer afirmações categóricas. No caso dos *Elementos*, podem-se extrair informações dos escritos de Platão e de Aristóteles, por exemplo, além de outras fontes posteriores, como Pappus e Proclus, já que desde sua escrita, os *Elementos* passaram por reedições, e em diversas línguas. Não sabemos com precisão o que Euclides escreveu e, comprovadamente, sua obra sofreu acréscimos, modificações e mutilações [1]. Dentro deste contexto de incertezas, é possível que as narrativas sobre os *Elementos* tenham produzido duas crenças, ambas de inspiração platônica: a necessidade de expor a Matemática com base no método axiomático-dedutivo e a restrição das construções geométricas às que podem ser realizadas com régua e compasso [3]. A primeira teve origem, principalmente, na obra de Proclus, filósofo neoplatônico do século V d.C.; e a segunda, na de Pappus, que viveu no século III d.C., um importante comentador dos trabalhos gregos, ambos separados de Euclides por, pelo menos, quinhentos anos.

O fato de, nos *Elementos* de Euclides, as construções serem realizadas por meio da régua e do compasso se contrapõe a outros escritos importantes da Geometria grega, como os de Apolônio ou Arquimedes, nos quais estes instrumentos não são enunciados explicitamente nos preâmbulos, levando-nos a crer que outros meios de construção terão sido usados. Como exemplo, citam-se o uso de régua graduada e o emprego de curvas especiais geradas por seções de sólidos (caso das cônicas, tratadas por Pappus e Proclus como lugares geométricos sólidos [11]) ou por movimentos mecânicos (caso da espiral ou de uma balança abstrata que Arquimedes empregava para equilibrar figuras geométricas equivalentes). Estes métodos mecânicos estão relacionados, ao que veremos mais a frente, com a possibilidade de os *software* de Geometria dinâmica permitirem a visualização da trajetória de um ponto que se movimenta a partir da modificação de elementos previamente construídos.

Sob esta ótica, a restrição ao uso da régua e do compasso não seria consequência de uma proibição, mas de uma otimização que visava simplificar a solução dos problemas de construção [1]. A miscelânea de técnicas de construções geométricas dos gregos foi classificada por Pappus, no século III d.C., nas três categorias já referidas [2]: problemas planos, construídos com régua e compasso; problemas sólidos, construídos com recurso a cônicas; e problemas lineares, construídos através de curvas mais gerais, como a espiral, a quadratriz, a conchóide e a cissóide. Os lugares geométricos eram portanto, àquela época, associados a superfícies (que podiam ser a própria superfície ou alguma curva nela contida) [12].

Foi a tradução, em 1588, da *Coleção Matemática*, de Pappus, que fez ressurgir o interesse pelas construções dos gregos. Nesta época despontaram diversos trabalhos, a partir da introdução do simbolismo algébrico, como os de Viète sobre a arte analítica, que disseminou um novo modo de resolver problemas geométricos por meio da Álgebra. Também os procedimentos de Arquimedes, que contrastam com o tipo de pesquisa característico de Euclides e de Apolônio, só encontrariam seguidores por volta dos séculos XVI e XVII [3].

Foi em 1637 que Fermat anunciou seu trabalho *Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos*, ao mesmo tempo em que surgiram as provas do livro *Discurso do Método* de Descartes, contendo *A Geometria*. Ambos haviam estabelecido, nesses textos, técnicas semelhantes para tratar problemas de lugares geométricos de modo algébrico. Em seguida, Fermat passou a estudar as equações e segundo grau. Para cada caso, tratou de mostrar que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica.

O método de Descartes de associar a Álgebra e a Geometria permitiu que todas as curvas da Matemática grega fossem descritas de modo simples e conciso por meio de simples equações entre suas coordenadas. Esta dualidade permite, por exemplo, que uma parábola possa ser compreendida como o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância de uma reta (diretriz *d*) e de um ponto (*P*) dados. A Fig. 3 ilustra a obtenção de um destes pontos (*M*), que é centro da circunferência que tangencia a diretriz *d* e passa por *P*. A Fig. 4 apresenta o lugar geométrico destes pontos.

Deste modo, a Geometria analítica, como a conhecemos atualmente, consiste em duas associações recíprocas: (i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Descartes estudou o problema de acordo com a primeira associação, mas Fermat foi pioneiro em atacar o problema através da segunda [1].

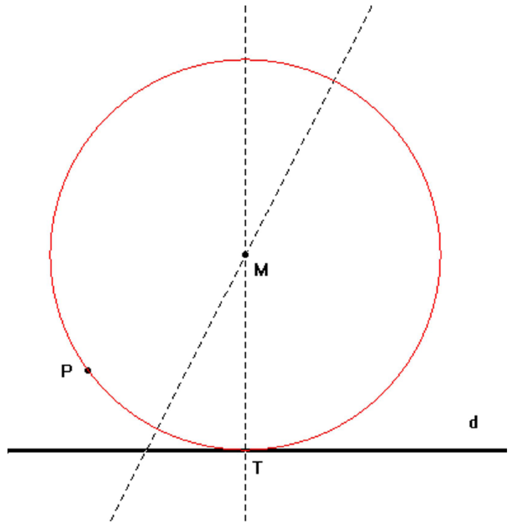

Fig. 3 - *M* é um dos pontos do plano que se situam a igual distância do ponto *P* e da reta *d*.

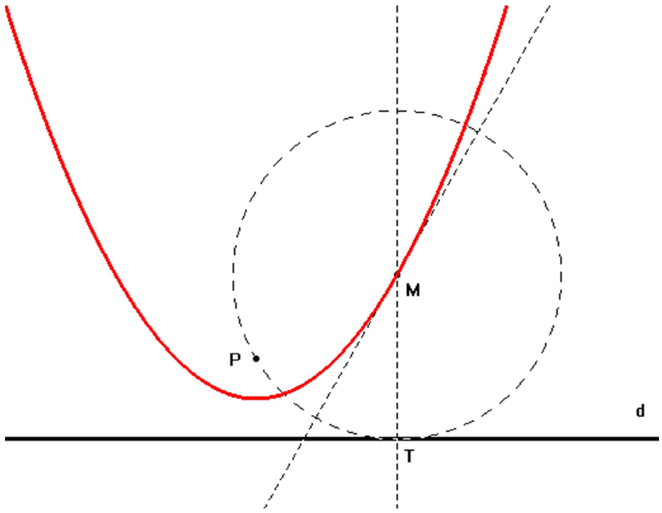

Fig. 4 - A parábola representada é o lugar geométrico dos pontos do plano que se situam a igual distância do ponto *P* e da reta *d*

A Matemática evoluiu muito nesta época em campos que outrora estavam ainda em estágio embrionário: entra em cena o conceito de função, nasce o cálculo diferencial e integral, desenvolve-se a análise.

A Geometria das construções, baseada no uso de régua e compasso, acabou por se tornar um campo com mais afinidade à Geometria Descritiva, criada por Monge. Esta tem por finalidade representar no plano as figuras do espaço, de modo a permitir estudar suas propriedades e resolver os problemas relativos às mesmas, com base no sistema de projeção cilíndrica ortogonal. É neste contexto que, por muitos anos, os instrumentos usados pelos desenhistas, como a régua e o compasso, deram suporte à representação de formas e à resolução gráfica de problemas.

Encontram-se aí, mais uma vez, as construções geométricas com recurso a lugares geométricos. Por meio da superfície cônica (considerada como o lugar geométrico das retas que contêm um mesmo ponto e definem um ângulo constante com determinado plano), ou mesmo da superfície cilindrica, diversos problemas de Geometria Descritiva podem ser resolvidos, inclusive alguns de grande ordem de complexidade, por envolverem superfícies curvas como parabolóides de revolução [13].

Descartes defendia que não haveria razão para excluir curvas construídas por outras máquinas tão acuradas quanto a régua e o compasso, e parece que estava certo. Chegamos a um tempo em que os computadores permitem traçados de figuras com resultados muito superiores àqueles feitos à mão. E os lugares geométricos, neste universo da informática, também receberam atenção especial.

O *software Cabri-Géomètre II,* por exemplo, tem uma ferramenta denominada 'Lugar Geométrico', capaz de criar um conjunto de objetos definidos pelo movimento de um ponto ao longo de uma trajetória, sendo a figura recalculada, cada vez que um dos objetos de base é modificado [14]. A Fig. 4 ilustra o uso desta ferramenta. O *Geometer's Sketchpad* traz, em seu manual [15], a definição de lugar geométrico como sendo o conjunto de todas as possíveis posições de algum objeto que satisfaz uma condição específica, apresentando procedimento dinâmico semelhante àquele do *Cabri-Géomètre II*. Estes procedimentos podem ser compreendidos como forma de visualizar uma função abstrata ou, alternativamente, uma amostra animada de pontos com determinada trajetória. Tal entendimento já havia sido definido, em 1948, conforme ilustra a Fig. 5.

Citaram-se, acima, apenas dois ambientes de Geometria dinâmica, porém outros mais existem, cada um com suas potencialidades. No que tange à forma de propiciarem a seus usuários a possibilidade de visualização dinâmica, têm-se mostrado muito úteis no ensino, na pré-visualização de conjecturas e na resolução de problemas gráficos, se distanciando enormemente do tempo em que os alunos meramente reproduziam construções passo a passo conforme receitas apresentadas em livros didáticos.

21 — Lugar geométrico. LUGAR GEOMÉTRICO COMO TRAJETORIA. Consideremos um ponto *M* que se move. Como já sabemos, êsse ponto descreve uma linha cuja forma depende das condições sob as quais o ponto se desloca.

Chama-se *lugar geométrico de um ponto, que pode ocupar uma infinidade de posições, a figura formada pelo conjunto dessas posições.*

Fig. 5 - Lugar geométrico como trajetória [9, 16].

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto se propôs a lançar um olhar sobre os lugares geométricos, não sob a ótica de sua utilidade contemporânea na resolução de problemas, mas buscando apresentar elementos que auxiliem os leitores a compreender seu papel no contexto da evolução da Matemática.

Na Grécia antiga, enquanto os problemas lidavam com construções e transformações das figuras geométricas, os teoremas enunciavam e demonstravam propriedades inerentes a estas figuras. Para estabelecer tais provas, os lugares geométricos, mesmo não sendo assim chamados àquela época, foram fundamentais. O mundo ocidental, após o período das trevas, voltou a contribuir significativamente com o desenvolvimento da Matemática a partir da tradução de obras que somente outras culturas haviam preservado. Os lugares geométricos, neste ressurgimento, dividiram com a Geometria analítica e outros campos da Matemática um espaço que, no longínquo passado, lhes coubera. Acabaram perdendo espaço frente às mudanças, mas não ficaram relegados a segundo e terceiro planos porque o mundo se deu conta da importância das representações gráficas, através da Geometria Descritiva e da Geometria Projetiva.

Com o grande desenvolvimento da informática, na segunda metade do século XX, os lugares geométricos passaram a ser integrados em *software* de Geometria dinâmica, o que contribuiu, de forma inquestionável, para a renovação do ensino da Geometria como um todo. Cremos que este é seu lugar no presente: o de serem usados de forma colaborativa com as áreas afins.

Gilson Braviano
Junho de 2015

REFERÊNCIAS:

[1] Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics:Vol. II*. New York: Dover.

[2] Roque, T. & Carvalho, J. B. P. (2012). *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM.

[3] Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

[4] Wagner, E. (2000). *Construções Geométricas* (Coleção do Professor de Matemática). Rio de Janeiro: SBM.

[5] Giongo, A. R. (1979). *Curso de Desenho Geométrico*. São Paulo: Nobel.

[6] Pinheiro, V. A. (1974). *Geometrografia:Vol. 1*. Rio de Janeiro: Bahiense.

[7] Marmo, C. M. B. (1966). *Curso de Desenho: Livro 2*. São Paulo: Moderna.

[8] Putnoki, J. C. (1991). *Elementos de Geometria & Desenho Geométrico*. São Paulo: Scipione.

[9] Araujo, A. A. (2011). *Abordagem de alguns lugares geométricos planos em um ambiente de geometria dinâmica* (Dissertação de Mestrado). Universidade Bandeirantes de São Paulo.

[10] Lima, E. (2001). *Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro: IMPA.

[11] Heath, S. T. (1981, 1a Edição: 1921). *A history of greek mathematics:Vol. II. From Aristarchus to Diophantus*. New York: Dover.

[12] Heath, S. T. (1981, 1a Edição: 1921). *A history of greek mathematics:Vol. I. From Thales to Euclid*. New York: Dover.

[13] Wellman, B. L. (1976). *Geometría Descriptiva*. Barcelona: Editorial Reverté.

[14] Texas Instruments (1997). *Cabri-Géomètre II: Guia de utilização para Windows*. Grenoble.

[15] Key Curriculum Press (2001). *The Geometer's Sketchpad: Reference Manual*. California.

[16] Roxo, E., Souza, J. C. M., & Thiré, C. (1948). *Matemática Ginasial 3a série* (3a ed). Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.