Revista Brasileira de Expressão Gráfica

LUZ, PENUMBRA E SOMBRA: UMA VISÃO ASTRONÔMICA SOBRE TANGENTES

Jansley Alves Chaves[1]
Clara Yuki[2]
Pedro Jansen Brasil[3]

Resumo: Este artigo vai estudar as construções das tangentes, em particular, as tangências às curvas de circunferências passando por um ponto fixo exterior à curva e incidente ao plano da curva, utilizando apenas os instrumentos régua e compasso. Serão abordadas formas distintas de construção, ora utilizando ambos os instrumentos, ora utilizando apenas o compasso e ora utilizando apenas a régua. O assunto é enriquecedor ao estudante à medida que o conduz às buscas de soluções lógico-dedutivas, que são o grande ganho da disciplina de Desenho Geométrico. Ao final, apresenta-se o eclipse solar como um exemplo de aplicação prática de tangência. E, neste caso, utilizando-se de uma construção de Jean-Victor Poncelet para transformar uma reta tangente a duas circunferências em um problema mais simples, ou seja, tangência à circunferência traçada de um ponto fixo exterior à curva e incidente ao plano da curva.

Palavras-chave: tangências à circunferência de círculo, geometria projetiva, geometria de inversão, transformações pontuais, isometrias.

Résumé: Dans cet article, on va étudier les constructions des tangentes, en particulier les tangences à la circonférence des courbes passant par un point fixe à l'extérieur de la courbe en utilisant seulement la règle et le compas. Nous aborderons les différentes façons de construction en utilisant les deux instruments, ensuite en utilisant uniquement le compas, et enfin en utilisant seulement la règle. Nous verrons que le sujet est enrichissant à l'étudiant dans la mesure où il le conduit à la recherche des solutions logiques déductives qui sont le grand gain de la discipline de dessin géométrique. À la fin de cet article, on va présenter l'éclipse solaire comme um exemple d'application pratique de tangence. Et dans ce cas, nous utiliserons une construction de Jean-Victor Poncelet, pour transformer une droite tangente à deux circonférences en un problème plus simple, c'est à dire la tangente à la circonférence tracée à partir d'un point fixe à l'extérieur de la courbe e incident au plan de la courbe.

Mots-clés: tangence à la circonférence de cercle, géométrie projective, géométrie d'inversion, transformations ponctuelles, isometries.

[1] Doutorando do IMUFRJ (Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro). E-mail: chavesrizo@gmail.com
[2] Aluna do CApUFRJ (Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro). E-mail:clarayuki25@gmail.com
[3] Aluno do CApUFRJ (Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro). E-mail:pedrojansenster@gmail.com

1 Introdução

O que retas tangentes às circunferências de círculos têm a ver com eclipses? Dada uma circunferência de círculo e um ponto exterior a esta curva, incidente ao plano da curva, como determinar as retas tangentes à curva passando pelo ponto dado? Estas questões foram levantadas em uma conversa informal nos corredores do CApUFRJ[4] com o prof. Fernando Villar[5]. Isso ensejou, no Dia da Matemática, uma apresentação, aos alunos do CApUFRJ, de construções geométricas com o uso de régua e compasso, assunto pertinente à disciplina de Desenho Geométrico, e uma frutífera discussão com meus dois monitores, que ora são coautores deste artigo.

Uma constatação sobre a disciplina de Desenho Geométrico nas escolas que ministram tal assunto é citada por Carvalho (1986):

> Infelizmente o desenho geométrico nem sempre é lecionado como deve. Apresenta-se inopinada, pura e simplesmente ao aluno, uma série de construções gráficas – na maioria dos casos complexas – de índole geométrica, silenciando-se sobre as razões matemáticas que lhe estruturam a forma, sobre a sua existência na Natureza, ou sobre a sua utilização pelo Homem. (CARVALHO, 1986, Introdução)

Percebe-se, pelo que o autor diz que não faz sentido algum apresentar construções gráficas aos estudantes se essa apresentação não for embasada por uma explicação matemática. Com base neste espírito é que surge este artigo, dando aplicabilidade ao aprendizado da construção de tangência sem, contudo, afastar-se da justificativa matemática de tal construção, procurando-se, sempre que possível, apresentar as relações que justificam tais construções.

Com a mesma linha de pensamento, os autores Coxeter e Greitzer (1967) discorrem sobre a pouca relevância que a disciplina Desenho Geométrico tem tido nos currículos das escolas, o que se reflete na maneira como os educadores lecionam a disciplina.

> [...].Talvez o status inferior da geometria no currículo escolar resulte de uma falta de familiaridade por parte dos educadores com a natureza da geometria e com os avanços que ocorreram no seu desenvolvimento.[...] (COXETER; GREITZER, 1967, p. xi, tradução nossa)[6]

A disciplina de Desenho Geométrico é a introdução ao curso de Desenho aplicado em vários ramos profissionais. É notório que o estudo desta disciplina desperta certa

---

[4] Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
[5] Fernando Celso Villar Marinho, Prof. Dr. do CApUFRJ.
[6] "Perhaps the inferior status of geometry in the school curriculum stems from a lack of familiarity on the part of educators with the nature of geometry and with advances that have taken place in its development".

Vol. 6, N°. 1, 2018, ISSN 2318-7492

coerência lógica, que induz ao raciocínio abstrato, o que é desejável em um desenvolvimento lógico. Concordamos com a citação de Carvalho (1986) em uma passagem que gostaríamos de compartilhar com nossos leitores.

> Iludem-se aqueles que pensam ser possível fixar em alguém, uma construção geométrica menos vulgar, sem explicações e comentários, despida de motivação, desprovida de uma sucessão de princípios, conclusões e definições, capazes de revelar a razão de ser de cada trecho do desenho, de cada fase da construção, de cada linha e até mesmo de cada ponto que nasce no papel. (CARVALHO, 1986, Introdução)

Um dos objetivos deste artigo, além de trazer uma solução a um determinado problema, uma aplicação prática, é, sobretudo, apresentar aos seus leitores a beleza e o raciocínio lógico-abstrato por trás de um problema prático de construção e, assim, mostrar a importância da disciplina Desenho Geométrico nos currículos escolares, quando da formação do cidadão reflexivo e independente. Neste artigo, iniciaremos definindo circunferência de círculo em um Plano Euclidiano com pontos ao infinito. Elencaremos sete formas distintas de traçar a reta tangente a uma circunferência de círculo por um ponto exterior a esta curva e incidente ao mesmo plano. Nestas construções nos permitiremos usar os instrumentos da geometria de Euclides: régua e compasso, com exceção das duas últimas construções, que faremos ou apenas com a régua ou apenas com o compasso. A partir deste ponto, o artigo está organizado da seguinte forma: Seção **2 -** Definição de circunferência de círculo em um plano euclidiano estendido, ou seja, com pontos ao infinito; na verdade, estamos sobre o plano projetivo; Seção **3 -** Construção com auxílio do arco-capaz de 90º; Seção **4 -** Construção através da potência de ponto e da média geométrica; Seção **5 -** Construção através da congruência de triângulo; Seção **6 -** Construção por meio da homotetia; Seção **7 -** Construção através da simetria axial ou reflexão; Seção **8 -** Construção utilizando apenas a régua; Seção **9 -** Construção utilizando apenas o compasso; Seção **10 -** Solução engenhosa de Poncelet[7] ao abordar a construção, com régua e compasso, da tangente a duas circunferências; Seção **11 -** Como o estudante pode aplicar tais conhecimentos ao eclipse solar; e Seção **12 -** Considerações finais.

A discussão sobre a tangência à curva de circunferência de círculo a partir da qual elaboramos esta introdução, surgiu após o professor Beto Pimentel[8] da disciplina de Física do CApUFRJ entregar-nos uma cópia de prova que havia aplicado a seus

---

[7] Jean-Victor Poncelet (1788-1867), matemático francês, que publicou o *Traité des propriétés projectives des figures* em 1822, marco historiográfico sobre geometria projetiva.
[8] Roberto Affonso Pimentel Junior, prof. Dr. do CApUFRJ.

estudantes sobre a questão dos fenômenos astronômicos - neste caso, sobre os eclipses. Logo, iniciamos uma conversa, Prof. Beto, Prof. Fernando e eu, sobre a linearidade do percurso do feixe de luz e a possibilidade de se resolver a questão apenas com o auxílio de instrumentos muito simples, tais como régua e compasso. O problema, conforme a Fig.1, solicitava ao estudante identificar qual fenômeno estaria observando um indivíduo situado em determinado local do planeta Terra, dado que o Sol e a Lua estavam em colinearidade[9] com a Terra.

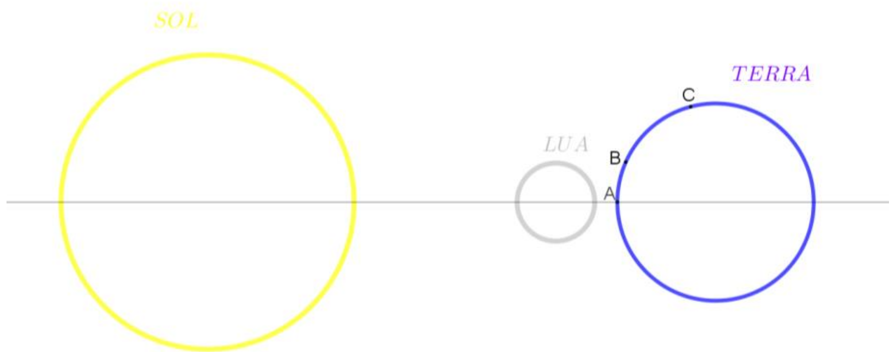

Figura 1 - Questão da prova[10]

"Qual fenômeno os indivíduos A, B, C podem observar no céu?"[11]

2 Definição de circunferência de círculo[12]

Em geometria plana, circunferência é uma linha curva, fechada, cujos pontos são equidistantes de um ponto fixo denominado centro desta curva fechada, uma distância fixada denominada raio.

No plano euclidiano, não estão definidos os pontos no infinito, porém para o desenvolvimento do nosso trabalho precisamos de um plano com esses pontos. Assim, pretendemos trabalhar com o plano euclidiano estendido, ou seja, o plano

[9] Colinearidade refere-se ao alinhamento de pontos. Usamos aqui no sentido de conjunção dos astros, pois estamos tratando o problema estereométrico de forma planimétrica.
[10] Todas as construções geométricas deste artigo foram realizadas pelos autores com o software de geometria dinâmica Geogebra.
[11] Adaptado da questão da 2ª série do E.M. do CApUFRJ – Física – prof. Beto Pimentel.
[12] O círculo é uma superfície e a circunferência de círculo é uma linha fronteira ao círculo. Neste artigo usaremos circunferência, ao invés de circunferência de círculo, sempre que não restarem dúvidas.

Vol. 6, N°. 1, 2018, ISSN 2318-7492

projetivo[13]. Neste plano, todas as retas coplanares são concorrentes e podemos conjecturar, pela definição acima mencionada, que a distância fixada para o raio pode ser nula, finita ou infinita. Vejamos como define Carvalho (1986):

> Sendo o ponto O de um plano, o vértice de um feixe de semirretas, ao conjunto dos pontos destas semirretas, que estão a uma distância de O, denomina-se circunferência.
>
> O vértice O do feixe denomina-se centro da circunferência.
>
> Os segmentos de reta cujos extremos são o centro e um ponto da circunferência são chamados raios. (CARVALHO, 1986, p.28)

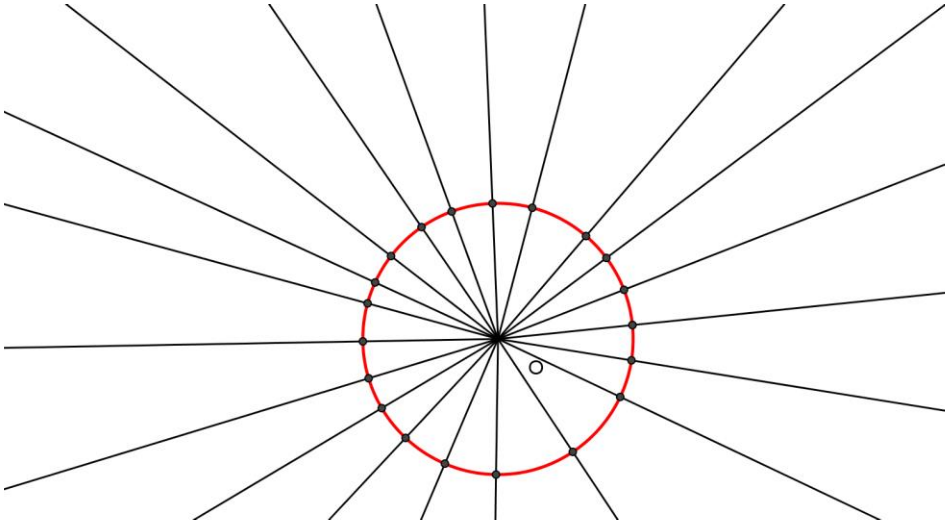

Figura 2 - Feixe de semirretas de mesma origem - ponto O

Por esta definição, fica claro que a circunferência de círculo pode ser entendida como um lugar geométrico[14] dos pontos equidistantes de um ponto fixo, denominado centro, uma distância fixada, denominada raio. Assim, é razoável pensar que essa distância raio é variável, e se acrescentarmos ao plano euclidiano os pontos no infinito, podemos escrever: $0 \leq r < \infty \; ou \; r \to \infty$. Ou seja, o raio pode ser nulo, finito ou tender ao infinito. Sendo nulo, a circunferência degenera, tornando-se um ponto; sendo finito, teremos a circunferência comumente conhecida; tendendo ao infinito, a circunferência degenera, tornando-se uma reta, conforme a Fig.3.

---

[13] Ver (OGILVY, 1969, p.5)

[14] Lugar Geométrico (L.G.) é, por definição, um conjunto de pontos, no plano ou no espaço, que possuem propriedades únicas e exclusivas.

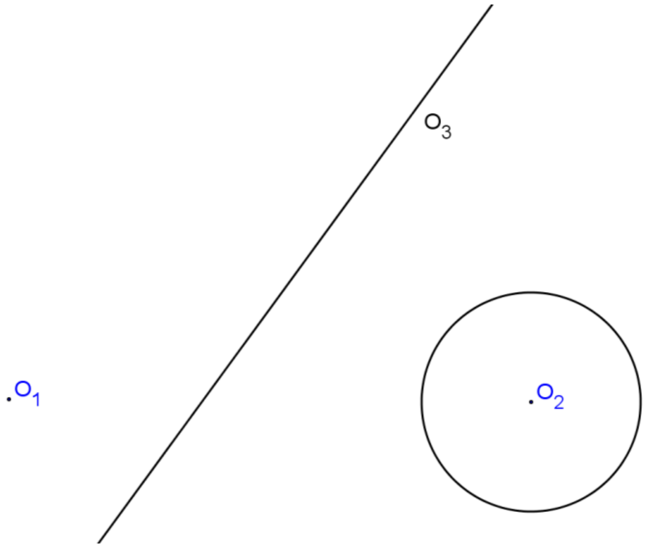

Figura 3 - $C_1(O_1; r = 0)$, $C_3(O_3 \to \infty;\ r \to \infty)$ e $C_2(O_2; r < \infty)$

3 Construção com auxílio do arco-capaz de 90º

3.1 Tangentes à circunferência passando por um ponto exterior e coplanar à curva

Dada uma curva no plano, que neste caso é uma circunferência $C(O; r)$ e um ponto P exterior, coplanar à curva, deseja-se traçar a tangente à curva passando pelo ponto P dado.

> Toda reta cuja distância ao centro do círculo seja igual ao raio, só tem um ponto comum com a circunferência, sendo por isto uma tangente, e consequentemente é a perpendicular ao raio que passa por este ponto de contato. (CARVALHO, 1986, p.30)

A tangente à curva é, portanto, perpendicular à normal[15] desta curva no ponto de tangência. “A perpendicular a uma tangente num ponto T de contato é a normal à circunferência neste ponto e coincide com o raio que passa por este mesmo ponto” (CARVALHO, 1986, p. 30).

A Figura 4 apresenta um esboço da situação solucionada.

[15] Normal de uma curva é a reta perpendicular à tangente no ponto de tangência a essa curva e que contém o centro da curva.

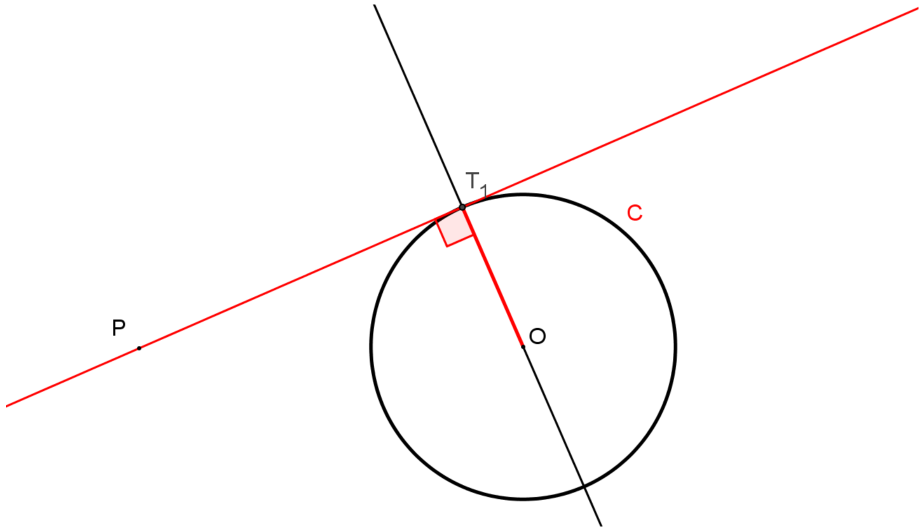

Figura 4 - Tangente $\overleftrightarrow{PT_1}$ à curva C perpendicular à normal $\overleftrightarrow{OT_1}$ no ponto de tangência T_1

Observe que o triângulo PT_1O é retângulo em T_1. Assim, existe uma circunferência de diâmetro $\overline{PO}$ que conterá o ponto T_1, pois o ângulo $\widehat{T_1}$ será um ângulo inscrito na circunferência cujo diâmetro é $\overline{PO}$. Logo, como o ângulo inscrito mede a metade do arco que compreende, o ângulo $\widehat{T_1}$ medirá 90^0. Assim, estamos diante de um L.G. denominado arco-capaz de 90^0.

3.2 Arco capaz de 90º

Definimos arco-capaz de 90º como Carvalho (1986):

> O lugar geométrico dos pontos dos quais se vê um segmento segundo um ângulo dado é constituído por dois arcos capazes do referido ângulo e que subtende ao segmento dado.
> [...]
> O lugar geométrico dos vértices de todos os triângulos que têm base comum e ângulo oposto está formado pelos arcos capazes do ângulo descritos sobre a base (CARVALHO, 1986, p. 62).

Vejamos a construção: trace o segmento $\overline{PO}$ e através da mediatriz determine o ponto médio M do segmento. Trace a circunferência $C_2(M; \overline{MO})$. A intersecção das circunferências nos dará os pontos de tangência, ou seja, $C_2 \cap C_1 = \{T_1, T_2\}$.

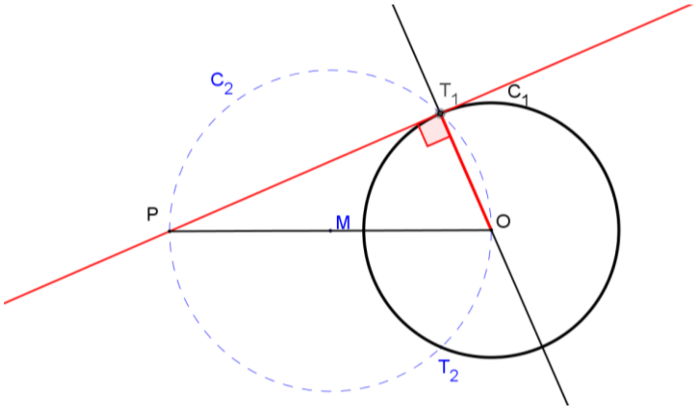

Figura 5 - Par de arcos capazes de 90º

C_2 é o par de arcos capazes de 90º. Esta construção é comumente encontrada nos livros didáticos editados no Brasil.

Nas construções das tangentes, neste artigo, devemos ter sempre em vista as Figuras 4 e 5.

4 Construção através da potência de ponto e da média geométrica

Dada uma curva no plano que, neste caso, é uma circunferência $C(O;r)$ e um ponto P exterior, coplanar à curva. A potência de P em relação à circunferência $C(O;r)$ é definida como:

> Chama-se potência de um ponto em relação a um círculo ao produto das distâncias deste ponto, aos dois pontos de intercepção de uma secante orientada e que passa por aquele ponto. (CARVALHO, 1986, p. 39)

E denotada por: $Pot_{C_1}P$. Assim, construindo as secantes à circunferência verificamos, conforme a Fig.6, a potência do ponto P.

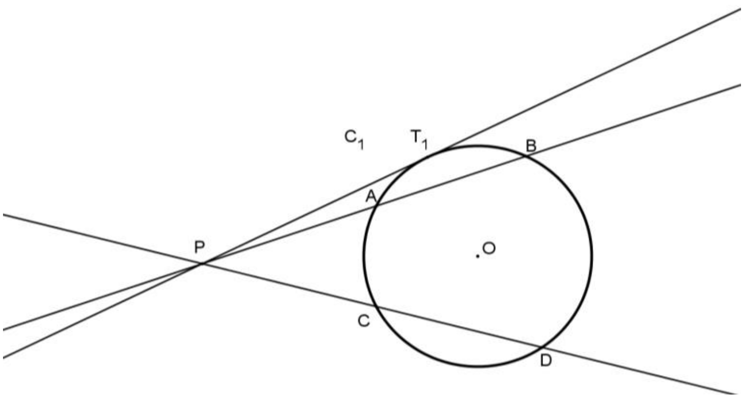

Figura 6 - Potência do ponto $P, Pot_{C_1}P = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PT_1}^2$

4.1 Potência de ponto em relação a uma circunferência

Se o prolongamento de duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência concorre em um ponto P exterior a essa curva, o produto $\overline{PA}\ X\ \overline{PB}$ é igual a $\overline{PC}\ X\ \overline{PD}$. Pois, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são retas antiparalelas[16] em relação à $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PC}$. Logo, os ângulos $P\hat{A}C$ e $P\hat{D}B$ são congruentes e podemos escrever que $\overline{PA}\ X\ \overline{PB} = \overline{PC}\ X\ \overline{PD}$, conforme a Fig.7.

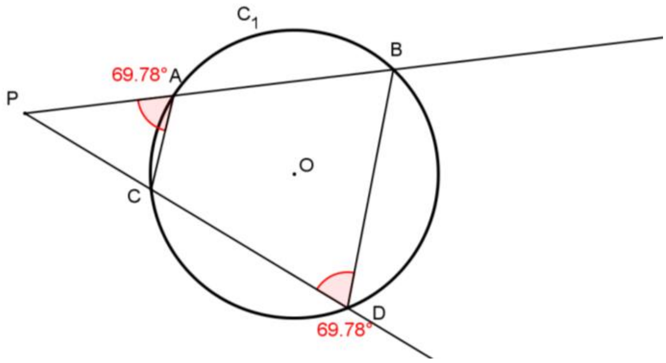

Figura 7 - $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ antiparalelas em relação à $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PC}$

4.1.1 Retas antiparalelas[17]

Seja um ângulo $p\hat{O}q$ e sejam duas retas r e t coplanares com o ângulo. Se suas semirretas p e q (lados do ângulo) são tais que o ângulo que a reta r forma com p é o mesmo ângulo que a reta t forma com q, as retas r e t são ditas antiparalelas.

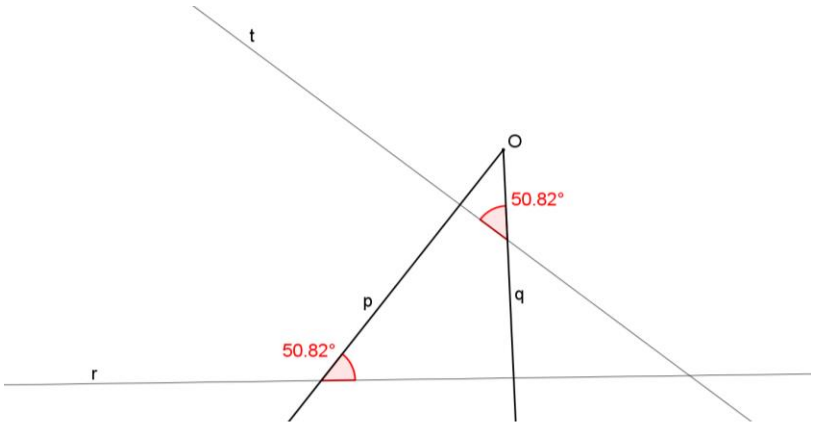

Figura 8 - r e t antiparalelas em relação às semirretas do ângulo $p\hat{O}q$.

[16] Definição no 4.1.1.
[17] Para melhor entendimento, ver MORGADO A.C; WAGNER, E; JORGE, M. **Geometria II,** 1974, p.49.

Retas antiparalelas formam triângulos semelhantes.

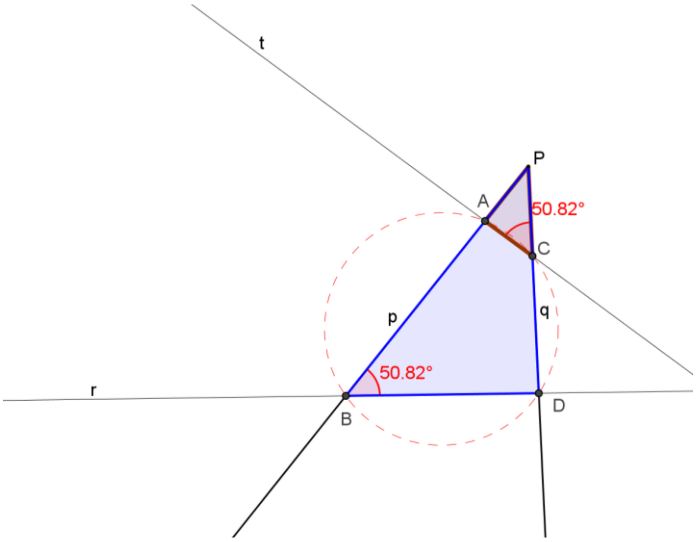

Figura 9 - $\Delta\, APC \approx \Delta\, BPD$

Logo, temos: $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{BD} \rightarrow PA\ X\ PB = PC\ X\ PD$. Observe que o ângulo $P\hat{C}A$ é congruente ao ângulo $P\hat{B}D$ e como o ângulo $A\hat{C}D$ é suplementar, o quadrilátero $ABDC$ é inscritível em uma circunferência[18]. Assim, temos exatamente a ideia de potência definida no **4.1**.

4.2 Média geométrica

Na Fig.10, verificamos que o segmento $\overline{P'T'}$ é a média geométrica de $\overline{P'A'}\ X\ \overline{P'B'}$. Observe que o triângulo $P'T'B'$ é reto em T' e que $P'T'$ é um cateto no qual sua projeção sobre a hipotenusa $P'B'$ é $P'A'$. As relações métricas no triângulo retângulo nos dizem: $\overline{P'T'}^2 = \overline{P'A'}\ X\ \overline{P'B'} \rightarrow \overline{P'T'} = \sqrt{\overline{P'A'}\ X\ \overline{P'B'}}$.

Logo, para determinarmos o ponto T_1 na circunferência C_1, basta resolver a seguinte equação:

$$\overline{PT_1}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} \rightarrow \overline{PT_1} = \sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}\ ,$$

---

[18] "Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos forem suplementares" (MORGADO, A.C.; WAGNER, E; JORGE, M. 2009, p. 67)

Calcula-se a média geométrica de $\overline{PA} \times \overline{PB}$ determinando a distância $\overline{PT_1}$. Com esta medida, traça-se uma circunferência de centro em P e raio $m(\overline{PT_1}) = m(\overline{P'T'})$, $C_2\ (P\ ;\ \overline{PT_1})$, obtendo-se, na intersecção das duas circunferências, os pontos de tangência, $C_2 \cap C_1 = \{T_1, T_2\}$.

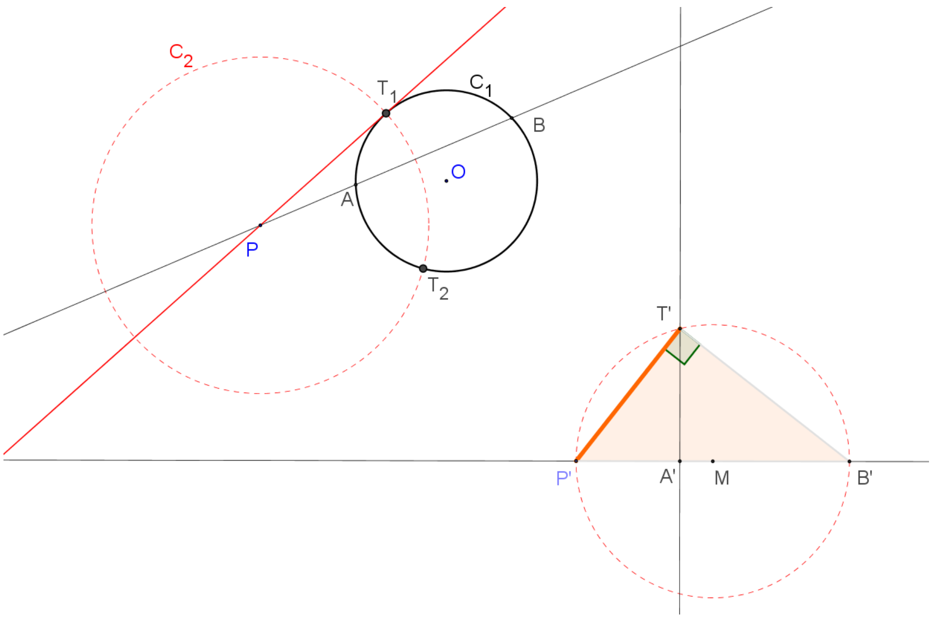

Figura 10 - Obtenção dos pontos T_1 e T_2, por potência de ponto e média geométrica

5 Construção através da congruência de triângulo

Observe o triângulo PT_1O, veja que é retângulo em T_1. Neste triângulo conhecemos as distâncias $\overline{PO}$ e $\overline{T_1O}$ (raio). Assim, podemos determinar, por construção, este triângulo e obtermos a distância $\overline{PT_1}$. Após essa obtenção, faremos a construção de uma circunferência de centro P e raio $\overline{PT_1}$, circunferência $C_2(P\ ;\ \overline{PT_1})$. A intersecção das duas circunferências nos dará os pontos de tangência: $C_2 \cap C_1 = \{T_1, T_2\}$.

A construção, conforme a Fig. 11 (desenho à direita), resume-se em concorrer perpendicularmente duas retas quaisquer e denominar o ponto de intersecção por T'_1. Em seguida, transferir a distância OT_1 (raio) a uma das retas perpendiculares, obtendo o ponto O'_1. Traçar a circunferência $(O'_1;\ \overline{OP})$, determinando o ponto P'_1 na outra perpendicular. Obtemos a distância $\overline{T'_1P'_1}$, que é a distância procurada $\overline{PT_1}$. Construímos então, a circunferência $C_2(P;\ \overline{PT_1})$ e encontramos na intersecção de C_2 e C_1 os pontos de tangência procurados, ou seja, $C_2 \cap C_1 = \{T_1, T_2\}$.

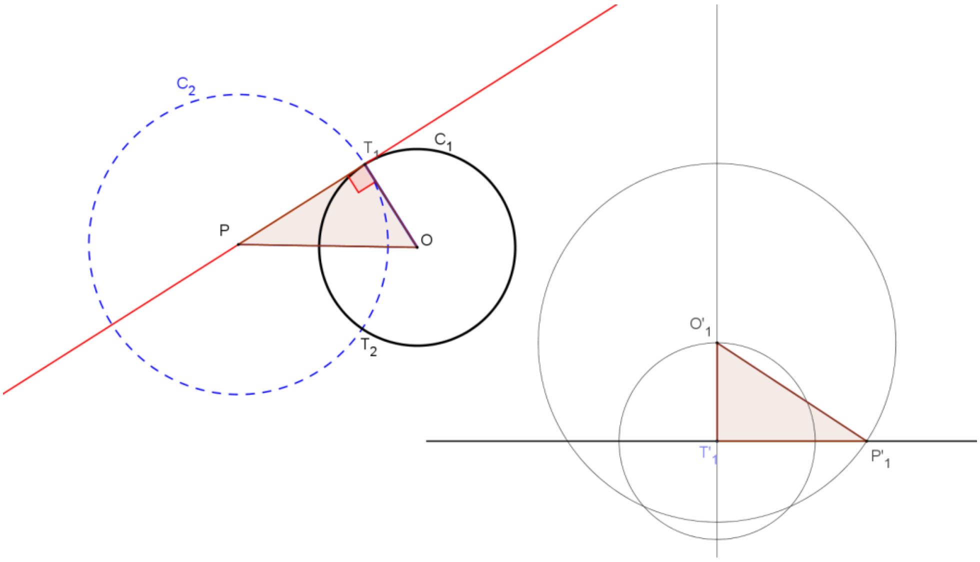

Figura 11 - Obtenção dos pontos T_1 e T_2, por semelhança de triângulos

6 Construção por meio da homotetia

A homotetia é uma transformação geométrica – também denominada de transformação pontual.

> Duas figuras F e $\bar{F}$ são transformadas por homotetia quando se correspondem ponto a ponto e tal que:
> - Pares de pontos homólogos estão alinhados com um ponto fixo, chamado centro de homotetia;
> - A razão das distâncias de pares de pontos homólogos ao centro de homotetia é constante – e chamada de razão de homotetia.
> Indicaremos: $\bar{F}\ t_H\ (H;K)\ F$ – lendo-se - $\bar{F}$ é transformada por homotetia de centro H e razão K de F (CALFA; ALMEIDA; BARBOSA, 1995, p. 261).

Neste problema, o centro de homotetia é o centro da circunferência, ponto O. A razão K de ampliação é fator tal que: $C_2\ t_H\ (O;K)\ C_1$.

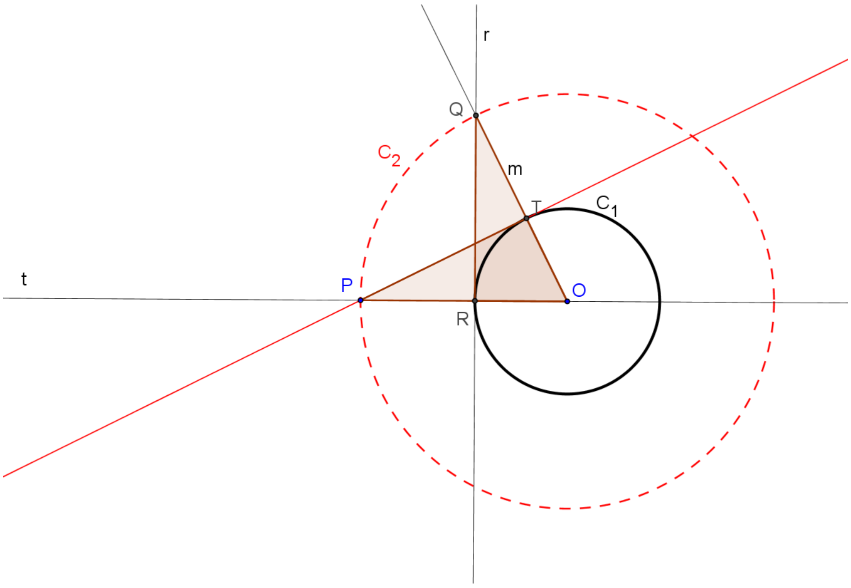

Figura 12 - Obtenção do ponto T por homotetia

A construção:

Traçar a reta t pelos pontos P e O de tal forma que uma intersecção da reta t com a circunferência C_1 seja o ponto R_1. Pelo ponto R_1 traça-se a reta r perpendicular à t. Com centro em O e raio $\overline{OP}$, constrói-se a circunferência C_2. A intersecção da reta r com a circunferência C_2 são os pontos Q_1 e Q_2. Traça-se a semirreta m de origem O e passando por Q_1. A intersecção da semirreta m com a circunferência C_1 é o ponto T, ou seja, o ponto de tangência. A reta tangente é a reta definida pelos pontos P e T.

A razão pela qual o ponto T é o ponto de tangência apoia-se no fato de que os triângulos PTO e Q_1RO são congruentes pelo caso LAL, sendo $m(\overline{OR}) = m(\overline{OT})$, o ângulo $\hat{O}$ comum aos dois triângulos e $m(\overline{OP}) = m(\overline{OQ_1})$. Assim, como $m(\widehat{R}) = 90^0$, conclui-se que $m(\widehat{T}) = 90^0$. Portanto, seus lados são perpendiculares dois a dois, ou seja, $\overrightarrow{OQ_1} \perp \overleftrightarrow{PT}$. Melhor dizendo: $\overrightarrow{OQ_1}$ é a normal à $\overleftrightarrow{PT}$ no ponto T, logo T é o ponto de tangência.

7 Construção através da simetria axial ou reflexão

Nesta construção faremos uma transformação geométrica de reflexão ou simetria axial.

Duas figuras F e $\bar{F}$ são transformadas por simetria em relação a uma reta, quando se correspondem ponto a ponto e tal que a reta é mediatriz de todos os segmentos que unem dois pontos homólogos na transformação.
A reta é, então, denominada eixo de simetria e a simetria axial.
Indicação: $\bar{F}\ t_{S(e)}\ F$ – lendo-se - $\bar{F}$ é transformada por simetria em relação ao eixo e da figura F. (CALFA; ALMEIDA; BARBOSA, 1995, p. 194)

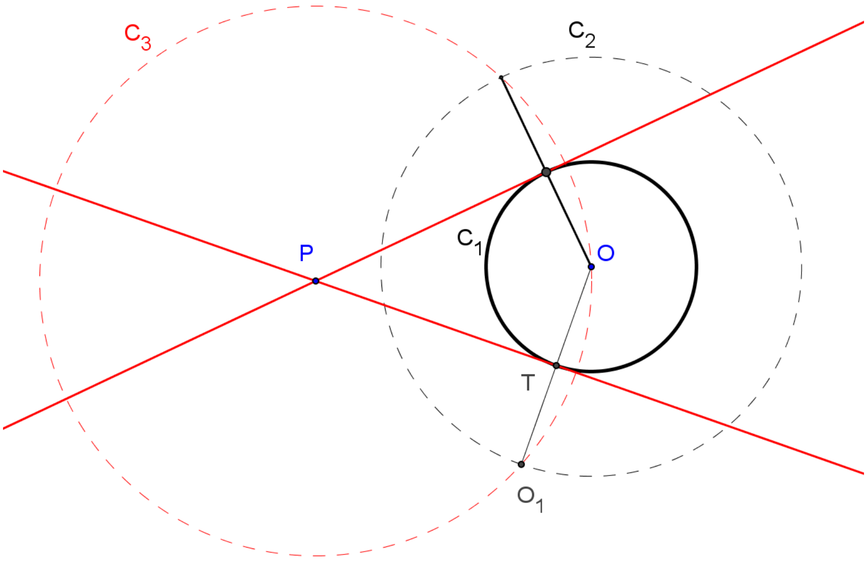

Figura 13 - Obtenção dos pontos T por simetria axial ou reflexão

Para construir o transformado do ponto O por simetria em relação à tangente (eixo de simetria), faz-se o seguinte: como, por definição, a reta tangente (eixo de simetria) deve ser a mediatriz do segmento definido pelo ponto O e seu transformado O_1, traça-se por O a perpendicular à tangente. Mas, como não temos o eixo, que é a reta tangente, pois é o que buscamos, determinaremos o transformado de O por outros meios e, ao traçarmos o segmento $\overline{OO_1}$, determinamos, na intersecção com a circunferência C_1, o ponto T de tangência, ou seja, $\overline{OO_1} \cap C_1 = \{T\}$. Observe na Fig.13 que o ponto O_1 é o ponto de intersecção da circunferência $C_2(O;2r)$, onde $2r$ é o dobro do raio de C_1, com a circunferência $C_3(P;\overline{OP})$. Ou seja, $C_2 \cap C_3 = \{O_1, O_2\}$.

Construção: Traça-se $C_2(O;2r)$ e $C_3(P;\overline{OP})$. Uma das intersecções nos dará o ponto O_1, pelo qual traçamos o segmento $\overline{O_1O}$ e obtemos o ponto T na intersecção com C_1, ou seja, $\overline{OO_1} \cap C_1 = \{T\}$.

8 Construção utilizando apenas a régua

Nós utilizaremos aqui a geometria projetiva, que é demarcada na historicidade pelo belo trabalho de Poncelet. “Na geometria Euclidiana, construções são feitas com régua e compasso. Na geometria projetiva é mais simples: a construção requer apenas a régua”[19] (COXETER, 1974, prefácio, tradução nossa).

A construção, em geometria projetiva, permite-nos fazê-la em qualquer cônica, de tal forma que podemos buscar uma solução em uma figura menos complexa. Segundo Poncelet (1862):

> Permite concluir que se a figura dada goza de uma determinada propriedade, a projeção desta figura deve gozar da mesma propriedade [...]
>
> Uma figura dada se quer procurar quais são as propriedades que ela goza, nós examinaremos se ela pode ser projetada sob uma figura mais simples[20] (PONCELET, 1862, p.378, tradução nossa).

Na geometria projetiva, a circunferência é a representação mais simples das curvas cônicas (elipse, hipérbole e parábola). Desta forma, resolver um problema em qualquer uma das cônicas é resolvê-la na circunferência e, por transformação projetiva, levar a solução à cônica. A resolução inicia-se traçando duas secantes à circunferência passando pelo ponto P exterior. Assim, determinam-se na circunferência quatro pontos e, portanto, um quadrilátero $ABCD$ inscrito ou um quadrângulo $ABCD$ inscrito.

Antes de resolver o problema iremos introduzir um conceito novo: Quadrângulo Completo.

---

[19] In Euclidean geometry, constructions are made with the ruler and compass. Projective geometry is simpler: its constructions require only the ruler.

[20] “Il est permis de concluere, en general, que, si la figure donnée jouit d’une certaine propriété de position, la projection de cette figure doit de la même propriété (...)
Une figure donnée, si l’on rechercher sont les propriétés de position don’t elle jouit, on examiner si elle peut être projetée suivant une figure plus simple”.

Vol. 6, N°. 1, 2018, ISSN 2318-7492

8.1 Quadrângulo Completo

O quadrângulo completo possui seis lados. Assim, no quadrilátero $ABCD$ formado pelos quatro pontos das duas secantes à circunferência temos os lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AC}$ e $\overline{BD}$, ou seja, as diagonais são contadas como lados. Os lados prolongados determinam, dois a dois, um ponto de intersecção. Logo, o prolongamento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ determina o ponto P (que é exatamente a origem das secantes, denominado polo da reta $\overleftrightarrow{IQ}$), o prolongamento dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$ determina, na intersecção, o ponto Q (denominado polo da reta $\overleftrightarrow{PI}$) e os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, as diagonais, intersectam-se no ponto I, denominado polo da reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Portanto, temos três retas: $\overleftrightarrow{PQ}, \overleftrightarrow{PI}$ e $\overleftrightarrow{IQ}$. Estas retas formam o triângulo polar e são retas polares dos pontos pelos quais não incidem, ou seja, a reta $\overleftrightarrow{PI}$ é polar do ponto Q, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é polar do ponto I e a reta $\overleftrightarrow{IQ}$ é polar do ponto P. A importância destes entes é que se tem aqui uma invariância na relação polo/polar, qualquer que seja a alteração feita na figura ou em sua projeção. Por exemplo, se a circunferência for deformada em uma cônica qualquer a relação polo/polar permanece invariante.

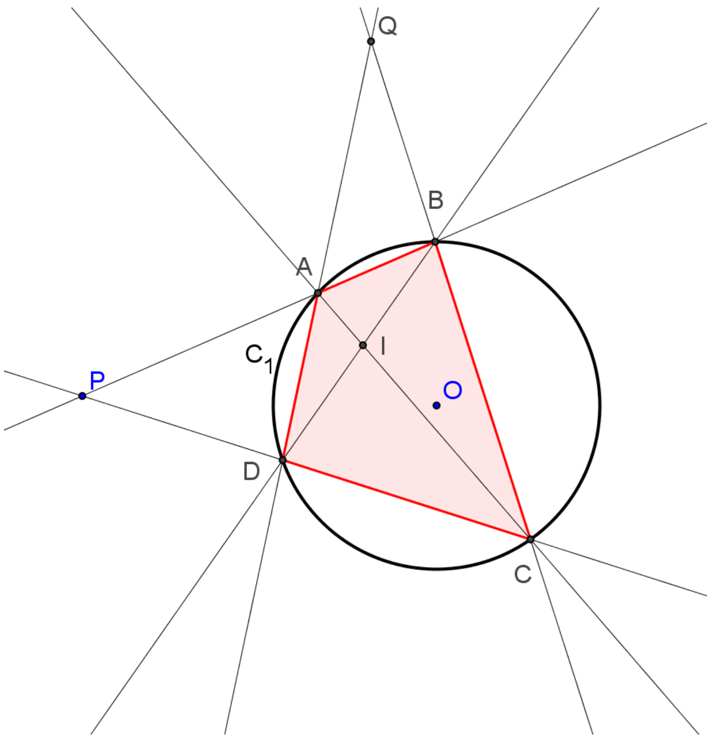

Figura 14 - Quadrângulo completo

As retas polares intersectam as cônicas, neste caso, a circunferência, no ponto de tangência[21]. Portanto, a reta $\overleftrightarrow{IQ}$ determina na interseção com a circunferência os dois pontos de tangência, ou seja, $\overleftrightarrow{IQ} \cap C_1 = \{T_1, T_2\}$ (ver Fig.15).

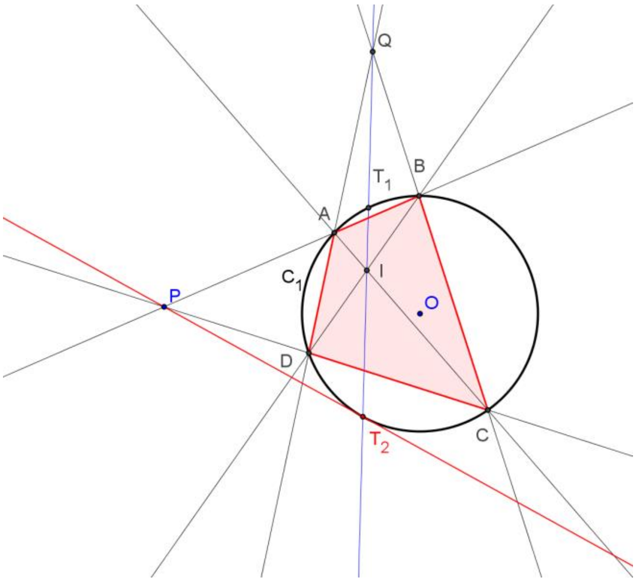

Figura 15 - Obtenção dos pontos T_1 e T_2 apenas com régua

9 Construção utilizando apenas o compasso

É razoável pensar que, se nos é permitida a utilização de uma variedade maior de instrumentos, poderemos resolver uma coleção maior de problemas de construção. Ao contrário, a restrição de instrumentos nos conduz a quantidades menores de soluções. Entretanto, é surpreendente que restringindo as construções somente ao compasso, o matemático italiano Lorenzo Mascheroni Dell'Omo[22] (1750-1800) tenha chegado à seguinte conclusão:

> [...] podemos encontrar apenas com o compasso todos os pontos de Euclides e que os outros autores de geometria elementar, ensinam a encontrar com a ajuda de régua e compasso juntos (DELL'OMO, 1798, prefácio xxj, tradução nossa)[23].

[21] Os dois pontos de interseção da reta polar com a cônica acrescidos dos outros dois pontos, polos respectivos das outras duas retas polares, estão distribuídos em uma divisão harmônica, ou seja, o feixe das quatro semirretas de origem em um polo divide a reta polar harmonicamente se passar pelos quatro pontos seguintes da reta polar: os outros dois polos do triângulo polar e a intersecção da reta polar com a cônica.
[22] Matemático e poeta italiano, publicou a obra: La Geometria del Compasso em 1797. Utilizamos neste artigo a tradução francesa, Géométrie du Compas, de 1798.
[23] [...] "on peut trouver avec le compas seul tous les points qu'Euclide et les autres auteurs de géométrie élémentaire, enseignent à trouver avec le secours de la règle et du compas réunis".

Nesta geometria, denominada geometria do compasso, as retas serão entendidas pela definição: dois pontos distintos determinam uma única reta. Ou seja, não serão traçadas as retas, apenas visualizadas.

> "Eu chamo de Geometria do compasso, esta que, por meio do compasso apenas, e sem o recurso da régua, determina a posição dos pontos" (DELL'OMO, 1798, p. 1, tradução nossa)[24].

Na referida obra, percebe-se que o autor, por mais que seus estudos estejam voltados para construções geométricas, não abandona em um só momento o rigor matemático que lhe permite a garantia da veracidade das construções, sobretudo, o rigor axiomático herdado dos gregos.

Para entendimento da solução precisamos rever o assunto de semelhança de triângulos.

9.1 Semelhança de triângulos

Se dois triângulos são semelhantes, então, segundo Barbosa (2006):

> Diremos que dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Com isto queremos dizer que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \to E, B \to F \text{ e } C \to G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações: $\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$.
>
> O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos (BARBOSA, 2006, p.109-110).

Na construção deve-se, primeiramente, observar que na Figura 5 temos o ponto P (exterior à curva), o ponto O (centro da curva) e o ponto M (ponto médio do segmento $\overline{OP}$ e centro do arco-capaz de 90º). Logo, obtendo o ponto M, traça-se a circunferência $C(M; \overline{OM})$ e determinam-se os pontos $T_1 \text{ e } T_2$ (pontos de tangências) e as retas visualizadas $\overleftrightarrow{PT_1} \text{ e } \overleftrightarrow{PT_2}$ são as tangentes procuradas. Deve-se, portanto, determinar o ponto M utilizando apenas o compasso.

[24] "J'appelle Géométrie du compas, celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, détermine la position des points".

O problema então se torna: dados dois pontos distintos, determinar o ponto médio do segmento definido pelos pontos dados, utilizando apenas o compasso. Este é o mesmo problema que Mascheroni Dell'Omo apresenta em sua obra (1798): "Dividir em duas partes iguais a distância $\overline{AB}$, isto é, achar o ponto médio M que seja o meio do segmento $\overline{AB}$." (DELL'OMO, 1798, p. 37, tradução nossa)[25]. Vejamos a solução apresentada na Fig.16, seguida dos passos construtivos.

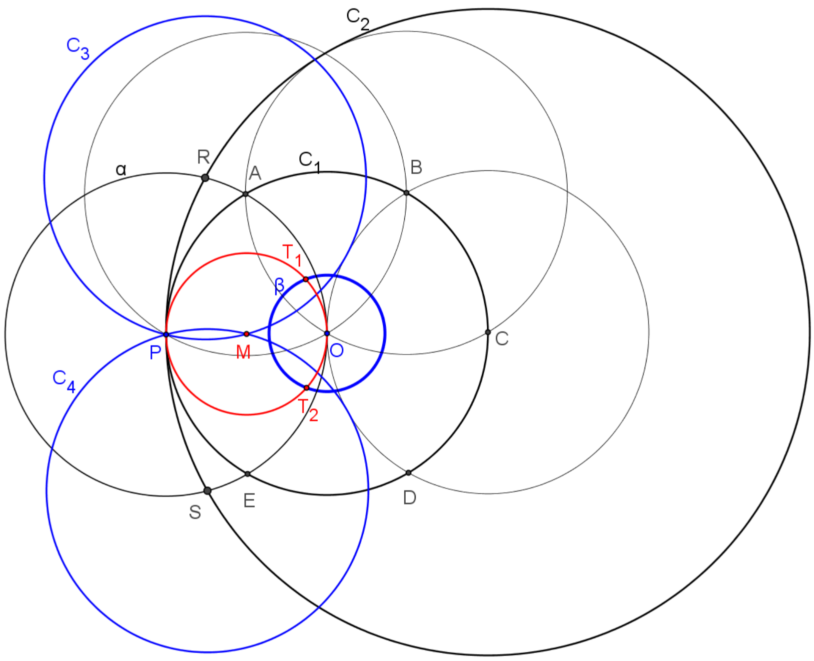

Figura 16 - Obtenção dos pontos T_1 e T_2, apenas com compasso

Traça-se a circunferência $C_1(O; \overline{OP})$. Façamos, em seguida, a divisão da circunferência C_1 em seis partes congruentes, iniciando pelo ponto P e determinando os pontos A, B, C, D e E. Assim, o ponto C é diametralmente oposto ao ponto P, pois os triângulos PAO, AOB e BOC são equiláteros e, portanto P, O, C são colineares. Observe que com esse procedimento conseguimos duplicar o segmento $\overline{OP}$ e, assim, sabemos como triplicá-lo ou mesmo determinar um múltiplo inteiro qualquer. Contudo, nosso objetivo é determinar o ponto médio do segmento $\overline{OP}$, ou seja, dividi-lo. Tracemos agora uma circunferência $C_2(C; \overline{CP})$. Esta irá intersectar a circunferência $\alpha(P; \overline{PO})$ nos

[25] "Partager em deux égales la distance $\overline{AB}$, c'est-à-dire, trouver le point M qui soit au moyen de la droite $\overline{AB}$ ".

pontos $R\ e\ S$, ou seja, $C_2 \cap \alpha = \{R, S\}$. Tracemos a circunferência $C_3(R; \overline{RP})$ e a circunferência $C_4(S; \overline{SP})$. A intersecção destas últimas duas circunferências determina o ponto M, ou seja, $C_3 \cap C_4 = \{P, M\}$. Obtido o ponto M, tracemos a circunferência $C(M; \overline{OM})$, e determinaremos os pontos $T_1\ e\ T_2$ (pontos de tangências) na circunferência original, $\beta(O; r)$. As retas visualizadas $\overleftrightarrow{PT_1}\ e\ \overleftrightarrow{PT_2}$ são as tangentes procuradas.

A justificativa repousa na razão de semelhança dos triângulos CRP e RPM. Os dois triângulos são isósceles por construção e possuem o ângulo $R\hat{P}C$ comum, ângulos das bases. Portanto, são semelhantes. E como o lado $\overline{CP} = 2.\overline{OP}$ e $\overline{RP} = \overline{OP}$, a razão de semelhança é igual a dois, ou seja, a base do triângulo CRP é o dobro da base do triângulo RPM. Conclui-se que $2.\overline{PM} = \overline{OP}$. Loogo, M é ponto médio de $\overline{OP}$.

10 Solução engenhosa de Poncelet ao abordar a construção, com régua e compasso, da tangente a duas circunferências

O nosso problema inicial é traçar a reta tangente a duas circunferências. Portanto, vejamos a solução apresentada por Poncelet (1862) em seu primeiro caderno:

> LEMAS DE GÉOMÉTRIA SINTÉTICA:
>
> Sobre os sistemas de círculos situados em um mesmo plano.
>
> Os círculos, combinados entre eles ou com retas, dão lugar a numerosas proposições que fornecem meios simples e elegantes para solução de uma classe de problemas interessantes por eles mesmos, e, sobretudo pela aplicação e extensão que se pode fazer as curvas de segundo grau. [...] (PONCELET, 1862, p. 1, tradução nossa)[26].

Inicialmente Poncelet apresenta o ponto que, segundo ele, chama-se de centro de similitude[27], esta denominação devida a Monge[28]. Este ponto é invariável e incidente à

[26] “LEMMES DE GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE: sur les systèmes de cercles situés dans um même plan. Les cercles, combinés entre eux ou avec des lines droites, donnent lieu à de nombreuses propositions qui fournirnissent des moyens simples et élégants pour solution d’une classe de problèmes intéressants par eux-mêmes, et surtout par l'application et l'extension qu’on em peut faire aux courbes du second degré “.

[27] À medida que a obra de Poncelet foi sendo absorvida pela comunidade matemática, este ponto passou a ser conhecido como Centro de projeção ou Ponto de projeção central.

[28] Gaspar Monge (1746 –1818) matemático francês reconhecido na historiografia como o criador do método da biprojeção ou Geometria Descritiva.

reta que passa pelo centro das duas circunferências. Na Fig. 17, apresentamos tanto o centro de similitude direta, ponto O, como o inverso, ponto O'. Estes pontos são respectivamente os pontos das tangentes exteriores e interiores às duas circunferências.

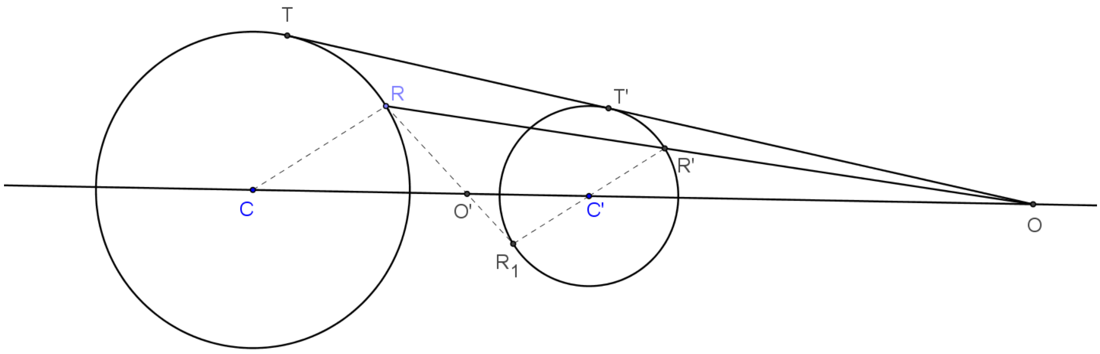

Figura 17 - Centro de similitude[29], pontos O e O'

Poncelet reduz a medida do raio das duas circunferências à medida do raio da menor delas, com isso transforma um problema de traçar as tangentes a duas circunferências de raio finito ao problema de traçar a tangente a duas circunferências, onde uma delas é degenerada a um ponto, ou seja, traçar a tangente a uma circunferência C_4 passando por um ponto O_2 exterior a C_4 (Figura 18). Vejamos a configuração do novo problema.

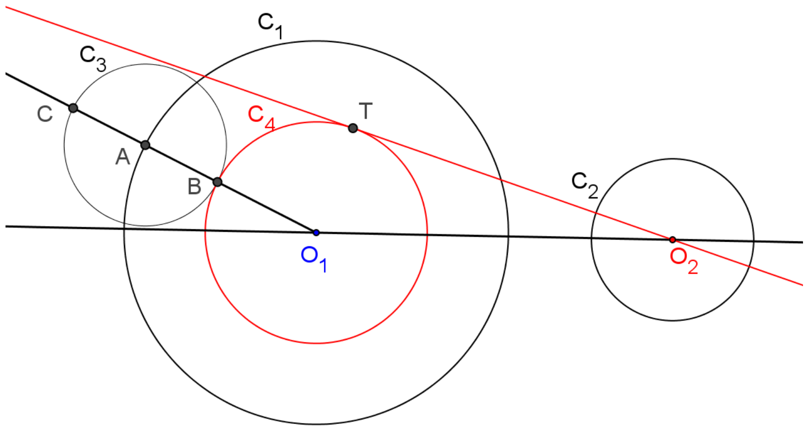

Figura 18 - Tangente à C_4 passando pelo ponto exterior O_2

[29] Figura 1 da obra de Poncelet de 1862.

Vol. 6, N°. 1, 2018, ISSN 2318-7492

Observe que a medida do raio de C_4 é a diferença do raio de C_1 e C_2. E O_2 é a circunferência C_2 degenerada a um ponto.

Determinando o ponto T por quaisquer dos processos vistos acima, basta agora, por homotetia, determinar o ponto de tangência em C_1, ou seja, basta traçar a semirreta $\overrightarrow{O_1T}$ e achar o ponto T_1 em C_1, em seguida traçar a paralela à O_2T por T_1 (Figura19).

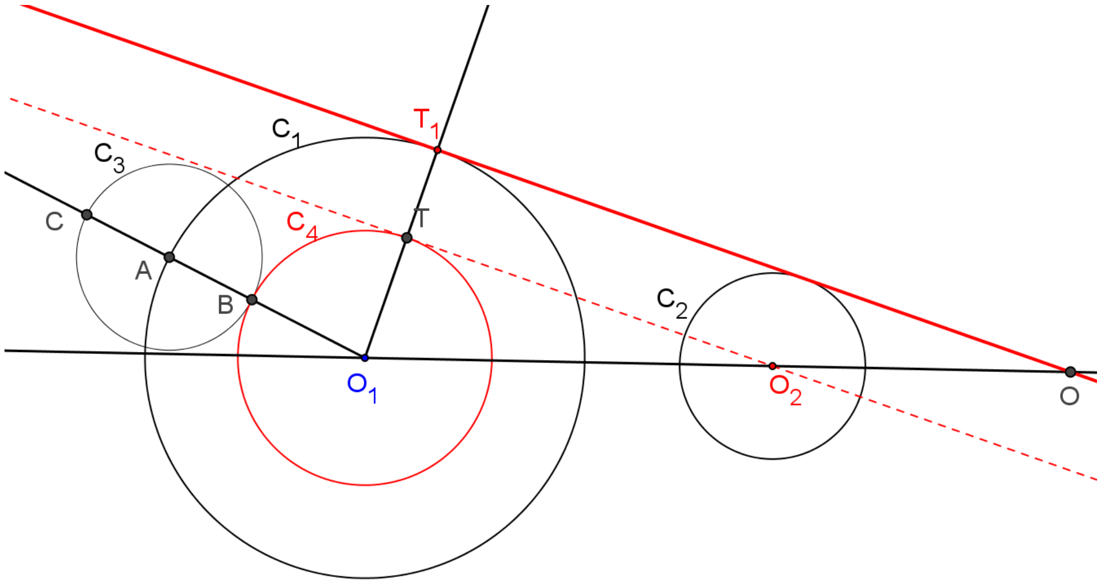

Figura 19 - Tangente à C_1 e C_2

11 Como o estudante pode aplicar tais conhecimentos ao eclipse solar

Com as informações supracitadas, o estudante possui condições suficientes para traçar a tangente às duas circunferências, projeções das duas esferas Sol e Lua, e determinar na circunferência, projeção da Terra, os pontos que definirão os arcos de circunferência (no cálculo planimétrico, que representam as calotas circulares na esfera da Terra no cálculo esteriométrico), onde teremos a sombra, a penumbra e a luz.

Traçadas as tangentes às circunferências SOL e LUA, é possível identificar na circunferência TERRA as regiões de sombra, penumbra e luz, contendo, respectivamente os pontos A, B e C (Figura 20).

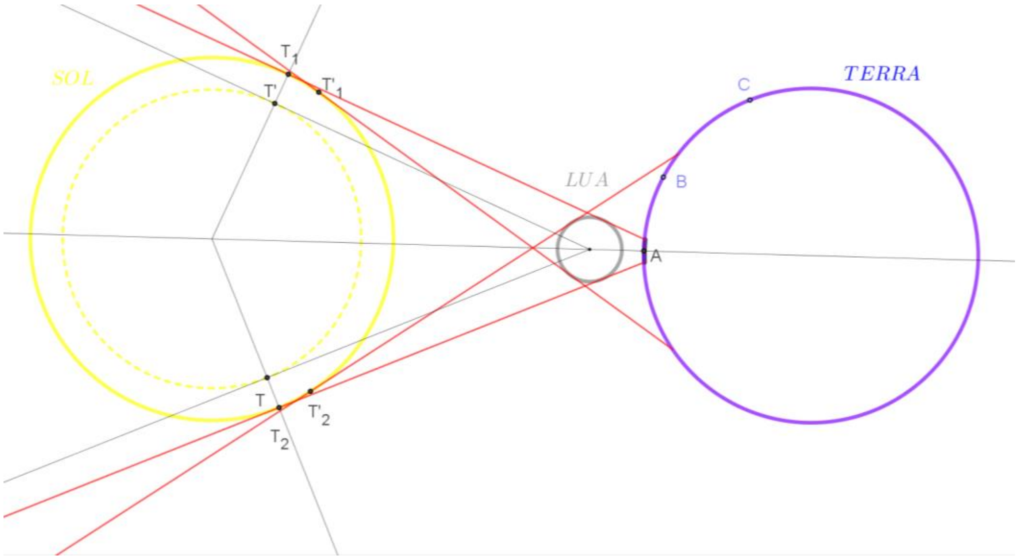

Figura 20 – Sombra, Penumbra e Luz

12 Considerações finais

Ao pensarmos em escrever sobre tangentes à circunferência de um ponto coplanar e exterior à curva, fazemos no estrito cumprimento de levar aos leitores um assunto pouco abordado nos livros didáticos brasileiros no que tange às diversidades de construções. Em uma pesquisa pelos livros que circulam no nosso mercado editorial ou mesmo em uma consulta à Internet, pode-se observar que o assunto é apresentado, quase sempre, para não dizer exclusivamente, pela construção do arco-capaz de 90º. Realizar a construção da tangência por potência de ponto a uma circunferência e média geométrica é explorar uma matemática que dá sentido ao assunto introduzido ao estudante do 9º ano do ensino básico. Da mesma forma, quando abordamos a solução de uma transformação isométrica, seja por congruência de triângulos, seja por reflexão ou simetria axial, exploramos um ramo da matemática que, embora de ampla aplicabilidade, o estudante do 9º ano vê, surpreso, tal solução. Acreditamos ser de grande interesse do professor quando apresentamos as construções por transformações geométricas, tais como, por exemplo, a homotetia, pois, dificilmente, encontramos uma solução com essa aplicação na tangência e acreditamos que é fundamental para uma melhor compreensão do estudante. As construções, que empregam apenas o compasso ou apenas a régua, permitiram-nos revisar uma bibliografia pouco usual nas instituições brasileiras. Falar sobre uma geometria do compasso ou uma geometria projetiva é apresentar ao leitor uma nova abordagem de construção pouco difundida, mas que possui um nível de raciocínio lógico-dedutivo mais abstrato do que a construção devida a Euclides. Dell’Omo diz em sua obra que qualquer solução construtível, com os instrumentos régua e compasso, também é possível construir apenas com o compasso. Mais tarde, outro matemático, Steiner[30],dirá que qualquer solução construtível com os instrumentos régua e compasso é também possível construir apenas com a régua, desde que seja dada no problema uma circunferência com seu centro.

A solução de Poncelet em sua obra é de uma intuição extraordinária, que, a nosso ver, deve ser explorada no ensino. Contudo, é preciso esclarecer aos estudantes que pontos e retas são circunferências degeneradas, respectivamente, de raios nulo e infinito.

Desta forma, temos a convicção de que o assunto explorado neste artigo será de grande valia não só aos estudantes, mas também, aos professores.

Aproveitamos para deixar claro que não pretendemos com este artigo esgotar as soluções, pelo contrário, toda solução diferente será bem recebida à medida que amplia as possibilidades de discussão de um assunto muito fundamental às diversas áreas do conhecimento humano.

Agradecimentos

Aos nossos amigos e professores do CApUFRJ em particular aos professores Marcelo Bueno e Fernando Villar pela leitura crítica, sugestões e correções. À Beatriz Rizo Ventura Chaves pelos comentários e correções.

Referências

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana.** 10ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 222 p.

CALFA, H. G; ALMEIDA, L.A; BARBOSA, R.C. **Desenho Geométrico Plano.** v.2, t.1. Coleção Marechal Trompowski. Rio de Janeiro: Biblioteca do Exército Editora, 1995. 299 p.

CARVALHO, B. A. **Desenho geométrico.** 3ª ed. Reimpressão. Rio de Janeiro: AO LIVRO TÉCNICO S/A, 1986.332 p.

COXETER, H. S. M; GREITZER, S.L. **Geometry revisited.** Ed. Washington, D.C: The mathematical Association of America,1967. 193 p.

[30] Jakob Steiner (1796 – 1863), matemático suíço, principal referência em geometria sintética.

COXETER, H. S. M. **Projective Geometry.** 2ª Ed. Toronto: University of Toronto,1974. 162 p.

DELL'OMO, L.M. **Géométrie du Compas**. Paris: Dupra, 1798. 326 p.

MORGADO, A.C.; WAGNER, E; JORGE, M. **Geometria I**. 4ª ed. Fortaleza: VestSeller, 2009. 138 p.

MORGADO A.C; WAGNER, E; JORGE, M. **Geometria II**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora s.a., 1974. 286 p.

OGILVY,C.S. **Excursions in geometry**. New York: Oxford University Press,1969. 178 p.

PONCELET, J.V. **Applications d'Analyses et de Géométrie**. 1ª ed. Paris: Mallet-Bachelier, 1862, Tome I. 563 p.