

MOVIMENTOS DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO SOBRE CURVAS CÔNICAS EM UM GRUPO DE ESTUDOS

*Bruno Leite Ferreira¹
Rúbia Barcelos Amaral-Schio²*

Resumo: O presente artigo é fruto de uma pesquisa desenvolvida em um Grupo de Estudos objetivando realizar uma leitura plausível da produção de significado dos seus integrantes sobre curvas cônicas. Neste recorte, apresentaremos inicialmente o contexto da pesquisa no que concerne à configuração do ambiente de produção de dados (grupo de estudos independente) ao referencial teórico adotado para análise (Modelo dos Campos Semânticos). Em seguida apresentamos as características dos sete Movimentos estabelecidos na análise. Por fim, destacamos a importância de se considerar os elementos operados em diferentes modelos para estabelecer associações, bem como a abordagem na Geometria Projetiva no processo de generalização das cônicas.

Palavras-chave: Geometria Gráfica. Seções Cônicas. Geometria Projetiva. Modelo dos Campos Semânticos.

Abstract: This paper is the result of a research developed in a Group of Studies aiming to make a plausible reading of the meaning production of its members about conics curves. We will initially present the context of the research regarding the configuration of the data production environment (independent study group), to the theoretical framework adopted for analysis (Semantic Field Model). After that, we present the characteristics of the seven Movements established in the analysis. Finally, in the considerations we emphasize the importance of considering the elements operated in different models to establish associations, as well as the approach in the Projective Geometry in the conic's generalization process.

Keywords: Graphic Geometry. Conics Section. Projective Geometry. Semantic Fields Model.

1 Introdução

Disciplinas de cursos superiores relacionadas à geometria geralmente são voltadas para estudar as formas geométricas por meio de abordagens de tratamento (por

¹ Universidade Federal de Pernambuco (Colégio de Aplicação). brunoleite@capufpe.com.

² Unesp – Rio Claro (Departamento de Educação Matemática). rubia.amaral@unesp.br.

exemplo: gráfico, analítico), sendo estas o que as distingue. Por exemplo, as curvas cônicas é um conteúdo trabalhado na disciplina de Geometria Analítica na qual se é estudado, dentre outros conteúdos, suas expressões algébricas no plano cartesiano, bem como a aplicação de transformações geométricas a curvas. Já em uma disciplina de Geometria Gráfica Bidimensional o mesmo conteúdo tem como enfoque construções de suas expressões gráficas. Em ambas as disciplinas propriedades da forma são exploradas, porém a abordagem pode delimitar quais características podem ser operadas.

Tal organização pode gerar no estudante um hiato entre abordagens de modo a não produzir associações entre elas, visto que, o enfoque da disciplina no estudo da forma por meio de dada abordagem. Ou seja, um programa organizado com enfoque em uma abordagem dificilmente terá espaço para aprofundar e relacionar outras abordagens para cada conteúdo do programa

Esforços no âmbito da educação gráfica e matemática têm sido feitos para minimizar essas lacunas a exemplo de Sousa (2017) que, em sua pesquisa, utiliza um modelo digital contendo cinco formas de expressão das curvas cônicas presentes no ensino para analisar como alunos de Licenciatura em Expressão Gráfica realizam as conversões entre diferentes abordagens. Em suas considerações, a pesquisadora aponta que mesmo com um ambiente que integrasse as diferentes expressões houve dificuldade por parte dos estudantes em estabelecer relações e que esta temática precisa ser aprofundada.

No intuito de compreender como ocorre o processo de produção de significado para as curvas cônicas ao se trabalhar com diferentes abordagens foi realizada uma pesquisa, de cunho qualitativo, com estudantes do curso de Matemática em um grupo de estudos independente. No artigo em tela, trazemos um recorte da pesquisa (FERREIRA, 2019), apresentando brevemente nosso referencial teórico, bem como nossos procedimentos e uma síntese dos resultados.

2 Grupo de Estudos como ambiente de produção de dados

A configuração do ambiente de produção de dados se deu após a aplicação de dois estudos pilotos que nos conduziram à proposta de grupo de estudos. Com base na experiência ao longo dos anos em mais de 1.000 grupos de estudos organizados em torno de 100 escolas, Murphy e Lick (1998) escreveram o livro *Whole-Faculty Study Groups: a powerful way to change schools and enhance learning*, no qual propõem um método para promover mudanças na escola e melhoria na qualidade de

aprendizagem. No método, os autores apresentam duas possibilidades de trabalho com grupos de estudos. Para nossa pesquisa, a segunda apresentou características que consideramos importantes para a produção dos dados. Funciona como um grupo de estudos independente, não vinculado a nenhuma organização institucional, ou seja, parte de interesses individuais.

Com relação a essa configuração, Murphy e Lick (1998) apontam ser este um importante instrumento de desenvolvimento individual e consideram como pontos fortes:

- Os participantes são os únicos a controlar o grupo, ou seja, não dependem de uma instância maior para funcionar, ou tomar decisões;
- As ações podem ser variadas, pois não estão ligadas à necessidade institucional;
- Os horários e locais da reunião são mais flexíveis, por conta de o grupo poder funcionar fora do horário e espaço da instituição de ensino;
- Apesar de funcionar fora de uma organização institucional, o que foi aprendido muito provavelmente irá afetar a instituição de algum modo;
- Grupo de estudos independente não precisa partir de referenciais pré-estabelecidos, ampliando as possibilidades de estudo, diferente de grupos ligados a um projeto institucional, em que há alguns pressupostos teóricos definidos.

Para estruturar um grupo, Murphy e Lick (1998) estabelecem o número máximo de seis integrantes, de maneira a proporcionar a participação de todos nas discussões em suporte mútuo, sem se preocupar com a composição, pois o que define o grupo é o interesse pelo mesmo tema. No caso da nossa pesquisa, o Grupo de Estudos³ foi composto por cinco integrantes, cinco estudantes do curso de Matemática e um professor de Geometria Gráfica (pesquisador).

Outros autores, como Ferreira (2003) e Fiorentini (2004), confluem para a ideia de trabalhos colaborativos como uma proposta potencializadora do desenvolvimento profissional docente. Esses autores descrevem características de um grupo colaborativo similares ao proposto por Murphy e Lick (1998) (grupos pequenos, interesse comum, todos são igualmente responsáveis etc.).

Neste sentido, ancorados na proposta de grupo de estudos independente configuramos o ambiente de produção de dados composto por cinco participantes (quatro estudantes de Matemática e um pesquisador) com encontros presenciais de

³ Doravante, ao citarmos Grupo de Estudos com iniciais em maiúsculas o termo correspondente ao ambiente de produção de dados.

duração de uma hora no primeiro semestre e duas horas no segundo semestre (a pedido dos integrantes).

A metodologia de trabalho no Grupo de Estudos baseou-se em uma abordagem investigativa em que põe o estudante como protagonista do processo, tendo o professor (no nosso caso o pesquisador) como partícipe do processo (PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2003; SKOVSMOSE, 2000). Do mesmo modo, não houve atividades pré-estabelecidas tendo como foco das discussões questões trazidas pelos participantes. O tema, curvas cônicas, foi escolhido previamente pelo pesquisador e um participante, e os outros integrantes compuseram o Grupo de acordo com o interesse sobre o tema. Como ponto de partida das discussões foi proposto o seguinte questionamento: “o que vocês sabem sobre as curvas cônicas”? Por esse direcionamento, a noção de curvas cônicas produzida no Grupo de Estudo estaria baseada no repertório semântico dos participantes. Interessou-nos compreender como se deu o processo de produção de significado desta noção. Para tal, tomamos como referencial de análise o Modelo Teórico dos Campos Semânticos.

3 Modelo dos Campos Semânticos (MCS)

Desenvolvido pelo prof. Dr. Rômulo Lins como parte de uma caracterização epistemológica para a Álgebra e para o pensamento algébrico, o Modelo pode, porém, ser empregado na análise de modos de produção de significado em outras áreas da Matemática.

Segundo o MCS, o conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação (LINS, 2012b). Os termos crença e afirmação estão unidos por um hífen por serem indissociáveis, ou seja, aquilo que é enunciado pelo sujeito, autor do conhecimento, só enuncia porque acredita (crença) que o que é dito é verdadeiro. Essa enunciação, como ato expressivo do conhecimento, não ocorre apenas pela fala, mas também por meio da escrita, de gestos, desenhos etc. Além disso, a constituição de conhecimento não se caracteriza pela descrição de algo, mas sim por uma afirmação (AYER, 1956). Não que não possa haver a descrição, mas não é condicionante.

Exemplificando, quando faço um desenho no quadro de um quadrado para explicar determinada propriedade em uma aula, o desenho compõe minha enunciação. Neste ato, já estou assumindo (afirmando, logo crendo) que aquilo é um quadrado do qual quero explicitar alguma propriedade, ou seja, não foi necessário explicar que a ilustração “é” um quadrado.

Neste caso, ao desenhar, eu constituo o objeto e a ilustração caracteriza uma *estipulação local*, a qual não precisa ser contestada, é apenas aceita, localmente, como uma verdade absoluta (LINS, 2012b). O que me autoriza a dizer o que digo é a legitimidade de o desenho ser reconhecido como quadrado. Para uma turma de 8º ano do ensino fundamental, é legítimo mostrar um desenho de um quadrado sem que se justifique. Entretanto, para o MCS, a crença-afirmação não é suficiente para ser conhecimento, ou seja, o fato de acreditar no que digo, por si só, não é o conhecimento, isto é, a justificação é parte constituinte do conhecimento. A diferença com relação à estipulação local é que a justificação é expressa junto da crença-afirmação, ela não é uma justificativa, ou mesmo uma explicação (pode ser, mas não é condicionante), e sim uma referência a uma experiência vivida que torna a enunciação legítima. Desse modo, só há produção de conhecimento quando a crença-afirmação é justificada (SILVA, 2003).

Usando o mesmo exemplo do quadrado, ao perguntar a uma criança de seis anos por que o desenho é um quadrado, ela poderia responder que ele se parece com a forma de um brinquedo que a mãe disse que era quadrado. Fazendo a mesma pergunta a um estudante do ensino médio, ele poderia responder que é por conta de ser um quadrilátero de lados iguais e ângulos internos retos. Ou seja, ambos identificam o desenho como quadrado, porém com justificações diferentes, conseqüentemente, são objetos distintos.

No primeiro caso, a identificação foi por semelhança⁴, no segundo pelas propriedades de equilateralidade e ortogonalidade. Neste sentido, a justificação, como elemento constitutivo do conhecimento, é parte do processo de dar legitimidade como também de constituir objetos.

Do ponto de vista da psicologia cognitiva piagetiana, a criança do exemplo anterior poderia ser classificada em um estágio de desenvolvimento inferior ao aluno do ensino médio (pré-operatório e operatório formal, respectivamente⁵) por “não ter” estabelecido relações abstratas, por exemplo. Ou seja, esta análise é determinada pela falta. Na perspectiva do MCS, a análise é feita a partir dos significados produzidos pelo sujeito e não pela falta, isso ajuda a entender não o porquê de ele dizer algo “errado”, mas de que lugar o sujeito fala.

O significado para o Modelo não é tudo o que se poderia dizer sobre o objeto, mas o que efetivamente se diz sobre ele (LINS, 1996). E sendo dito, é em relação a um

⁴ Semelhança está sendo entendida aqui como “ser parecido com” e não no sentido matemático.

⁵ Para conhecer a teoria cognitivista de Jean Piaget consultar (PIAGET, 2012).

contexto; isso quer dizer que o significado é sempre local e, conseqüentemente, ele pode ir mudando conforme as novas experiências. O local no Modelo se refere à atividade.

A noção de atividade, no MCS, tem sua fundamentação em Leontiev (2011), que considera como tal o processo psicologicamente caracterizado pelo motivo, ou seja, para aquilo que se volta o sujeito. Nessa perspectiva, a atividade pode ser assumida como unidade de análise do processo de produção de significado, pois em atividades diferentes são produzidos significados distintos (SILVA, 2003).

Como níveis da atividade, Leontiev (2011) descreve a atividade em si, as ações e as operações. A primeira é caracterizada pelo motivo, a segunda são ações cujo objetivo difere do motivo e a terceira são as condições de se executar as ações. Tendo como atividade construir uma casa, um grupo de pessoas irá realizar ações para atender a essa necessidade. O arquiteto faz o projeto, o engenheiro faz o cálculo das estruturas, os pedreiros fazem a construção, todos realizam ações que, isoladamente, não teriam como resultado a casa (o motivo). Já as operações podem ser diferenciadas para uma mesma ação; um arquiteto, por exemplo, pode optar por elaborar rascunhos em um papel em seu processo criativo de concepção do projeto para depois desenhar no computador. Outro arquiteto poderia optar por um programa computacional de modelagem tridimensional, ou seja, são modos distintos de operar em uma mesma ação.

Entendendo que os significados são produzidos no interior de uma atividade e que eles podem se modificar ao longo do processo, o Campo Semântico é esse “processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (LINS, 2012b, p.20). O núcleo é constituído por estipulações locais que podem se manter estáveis, serem adicionadas, retiradas ou mudarem de status quando uma estipulação passa a ser requerida de uma justificação. Do mesmo modo, um conhecimento pode, a partir de determinado momento, ser tratado como uma estipulação local, fazendo parte do núcleo. Esse processo é chamado de *nucleação* (SILVA, 2003).

Outra noção importante para o Modelo é o de espaço comunicativo. A comunicação, no contexto do MCS, ocorre entre sujeitos cognitivos e não entre sujeitos biológicos. Neste sentido uma pessoa, enquanto sujeito cognitivo, fala na direção de um interlocutor (sujeito cognitivo constituído pela pessoa), ou seja, aquele, o autor do conhecimento, falo para um leitor acreditando que este entenda e considere legítimo aquilo que falou.

Já o que escuta, o leitor, não escuta a enunciação que o autor falou; o que chegam são os resíduos de enunciação, que é o que o leitor acredita ter ouvido de um autor (sujeito cognitivo constituído pelo leitor). Quando responde, o leitor assume a condição de autor e a comunicação continua (Figura 1c). Contudo, só há comunicação, segundo o Modelo, quando o autor e o leitor compartilham o mesmo interlocutor. O efeito psicológico dessa comunicação é a descrita entre emissor e receptor (BERLO, 1979) que falam em direções opostas (Figura 1b), porém o que ocorre, segundo o MCS, são dois sujeitos cognitivos que falam na mesma direção (Figura 1d).

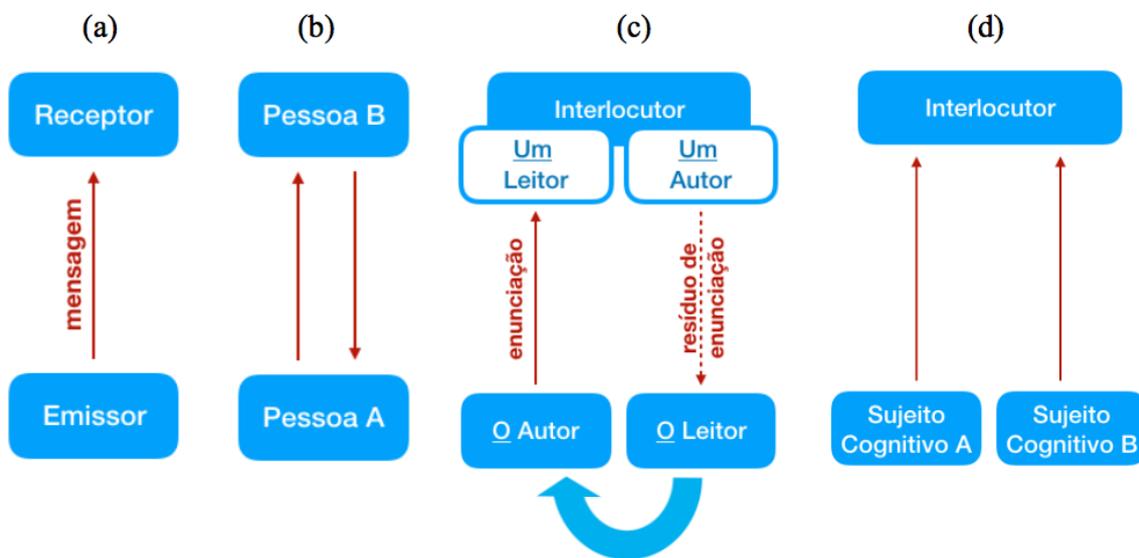


Figura 1: (a) Agentes na comunicação clássica; (b) comunicação clássica; (c) agentes na comunicação no MCS; (d) comunicação no MCS.

Fonte: Ferreira (2019, p. 182).

Quando não há produção de significado, não há comunicação; isso quer dizer que o leitor não constituiu em texto os resíduos de enunciação. O texto é então aquilo para o qual o leitor produz significado.

O que nos permite dizer que uma pessoa está operando nesse ou naquele Campo Semântico é o que Lins (2012b) chama de *leitura plausível*, que é a produção de significado em relação à produção de significado do outro. Isso quer dizer que, no caso da nossa pesquisa, o pesquisador se colocou na condição de um possível leitor do processo de produção de significado dos membros de um Grupo de Estudos sobre curvas cônicas, a fim de fazer uma leitura plausível desse processo.

4 Movimentos do processo de produção de Significado

No intuito de responder a pergunta de pesquisa: *como é engendrado um “corpo”⁶ por sujeitos que, em um Grupo de Estudos, produzem significados para curvas cônicas?* nos apoiamos em uma abordagem qualitativa para realizar uma leitura plausível segundo o MCS. Foram considerados, como ambientes de produção de dados, todos os espaços destinados a discutir e refletir sobre a investigação do Grupo de Estudos. Isso quer dizer que os ambientes não se restringiram apenas às reuniões presenciais semanais, mas também ao aplicativo para smartphone WhatsApp (no grupo ou em conversas entre pares) e aos diários on-line dos sujeitos. As fontes de dados, nesta pesquisa, corresponderam aos registros produzidos das discussões e reflexões em cada ambiente.

Entendo que não há produção de significado sem co-sujeitos direcionamos nossa análise para olhar a dinâmica do Grupo pela produção de um dos sujeitos. Para selecionar as citações dos dados, identificamos quais noções iniciais ele enunciou, quando essas noções mudam ou foram incorporadas e o que ocorreu para isso acontecer. Com isso, foram contemplados tanto o histórico dos objetos como o processo de nucleação e a mudança dos interlocutores (SILVA, 2003). As noções iniciais são entendidas, nesta pesquisa, como legitimidades inerentes expressas, constituindo, assim, os objetos iniciais na linha da história dos objetos e, conseqüentemente, um repertório semântico a priori. Nesta direção, as legitimidades inerentes e como elas se modificam ou não ao longo do processo compõem também a análise da dinâmica. Contudo, não há como observar esses elementos de análise independentemente; por esse motivo, eles foram tratados conjuntamente, sendo destacados no texto de acordo com o que se quer evidenciar.

Para se ter uma noção dos conteúdos trabalhados no Grupo de Estudos, destacamos cinco blocos. No primeiro, as discussões concentraram-se em legitimar o que eram as curvas cônicas, tendo como principal noção a de seção cônica, porém para chegar a uma caracterização satisfatória para o grupo e para que não houvesse divergência, foi necessário discutir outras noções, como a de curva aberta e fechada, plana e não plana, reta e torta.

Em um segundo bloco, os participantes se dedicaram a discutir sobre a possibilidade de elaborar um modelo que mostrasse as seções cônicas. Para tal, foram elencadas variáveis que poderiam ser utilizadas do modelo, tanto da superfície

⁶ Corpo, ou corpo cultural (LINS, 2012a), neste trabalho é entendido como um conjunto de legitimidades constituídas ao longo de um processo sobre um mesmo conteúdo. Nesta perspectiva, o corpo cultural se apresenta para nós hoje como “uma síntese do processo histórico em transformação” (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 66).

cônica como do plano de seção em relação à superfície. Nesse processo, houve uma discussão das leis de geração da superfície cônica, reta e oblíqua, bem como do detalhamento das posições do plano de seção em relação para se gerar cada curva e suas degenerações (ponto, reta e duas retas concorrentes). Apenas as seções na superfície cônica reta foram legitimadas; no cone oblíquo, as discussões não avançaram.

No terceiro bloco, os participantes buscaram elencar e caracterizar elementos gerais para todas as cônicas. Essa caracterização serviria também para a elaboração do modelo. Desse modo, foram citados e discutidos os seguintes elementos: focos, eixos, centros, vértices, pontos impróprios, regiões, diretrizes, tangentes e excentricidade.

O quarto bloco foi dedicado à discussão das expressões algébricas das cônicas. Nesse período, características dos elementos foram aprofundadas e relações estabelecidas entre os parâmetros das equações, como também a generalização da propriedade da soma dos raios focais para todas as cônicas.

Por fim, o último bloco foi destinado à construção geométrica das curvas cônicas. Nesse bloco, foi discutida mais de uma possibilidade de construção, envolvendo propriedades de lugares geométricos dos pontos do plano que são equidistantes de modo particular e generalizado, de modo que o elemento círculo diretor também foi caracterizado.

A partir dos dados elencamos sete Movimentos da dinâmica de produção de significado de Guilherme (nosso sujeito) sobre a noção de curvas cônicas. Apesar de os Movimentos serem apresentados em uma ordem que possa aparentar certa cronologia, não houve uma rigidez temporal na distinção entre os Movimentos; isso significa que há comentários de análise que se referem a encontros distintos em uma mesma categoria, como também há um mesmo Movimento que se expressa em momentos diferentes, perpassando outros.

Para ilustrar cada Movimento apresentaremos um exemplo e suas principais características.

4.1 Movimento das Curvas Independentes

No primeiro movimento destacou-se a operação das cônicas como curvas com propriedades isoladas que são atribuídas o nome de cônicas. Guilherme já em sua primeira enunciação, ao responder a pergunta sobre o que sabe sobre as curvas

cônicas no diário, expressa elementos desse Movimento. Abaixo, apresentamos o extrato da sua resposta.

Trabalhei um pouco com a manipulação delas, seja rotação e translação. Vi a parábola, elipse e hipérbole (não que eu saiba algebricamente, muito pelo contrário, se sei algo sobre parábolas é muito). Lembro que as cônicas são escritas por $ax + bxy + cy + dx + ey + f = 0$. (FERREIRA, 2019, p. 202).

Nesta primeira enunciação, Guilherme constitui a noção inicial de curvas cônicas como algo manipulável, como objetos identificados em uma categoria e por um objeto que expressa generalidade. A priori, consideramos que os significados atribuídos se referiam ao contexto da disciplina de Geometria Analítica, por conta de o programa do curso contemplar o estudo das expressões algébricas das três curvas citadas, bem como da equação geral das cônicas e de operações analíticas de translação e de rotação. Contudo, analisando os detalhes, mudamos a leitura. Na terceira sentença, as cônicas foram constituídas como um objeto expresso de modo algébrico; entretanto, na primeira sentença, não há uma explicitação, por parte do sujeito, de que essas transformações foram operadas de modo algébrico. Da mesma maneira, apesar de, na segunda sentença, ser explicitado que a parábola, a elipse e a hipérbole foram “vistas”, a afirmação nos sugere que há uma legitimidade inerente acerca desses objetos que vai além do modo algébrico, pois o que é legítimo para Guilherme é o fato de que há possibilidade de expressar algo de determinada maneira; neste sentido, houve um objeto constituído que não é o objeto expresso algebricamente.

Ao constituir as cônicas como a parábola, a elipse e a hipérbole, o texto se caracteriza como estipulação local, pois, naquele momento, não foi necessária a justificção. Contudo, apenas por esta enunciação não foi possível inferir a quais modos de expressão Guilherme se referiu.

Para validar as inferências, questionamos Guilherme em uma conversa no WhatsApp (no período de análise dos dados, após o término do Grupo de Estudos) sobre quando ele estudou que a parábola, a elipse e a hipérbole são cônicas, que podem ser manipuladas por rotação e translação e expressas por uma equação geral. Ele respondeu:

Eu vi esses objetos todos na disciplina de Geometria Analítica. Não significa que eu fui capaz de realizar a rotação ou translação, mas as equações gerais e as características foram todas nessas disciplinas. Vi pouca coisa no ensino médio, nada analítico, somente geométrico. Principalmente a elipse. A hipérbole não foi retratada nessa época. (FERREIRA, 2019, p. 203).

Como inferido, Guilherme, nesta última enunciação, produziu conhecimento para as então estipulações locais, justificando o estudo de algumas curvas na educação básica por uma abordagem geométrica. Para obter mais detalhes, questionamos se ele viu alguma coisa sobre cônicas na educação básica.

Vi, sim – respondeu Guilherme – A ideia era basicamente definir bem erroneamente as "figuras". Na escola, a circunferência tinha característica de ter todos os pontos com a mesma distância do centro. Até aí tudo bem. Mas quando a gente falou da elipse, o que virava o centro? Precisaria daquela nossa longa discussão do Grupo de Estudos. Para não fazer a ponte, necessitaria de um debate mais longo, o professor simplesmente definiu: São os pontos cuja soma das distâncias aos focos é uma constante. Quanto aos focos: são "componentes" da elipse. Em momento algum foram citados focos da circunferência, por exemplo. (FERREIRA, 2019, p. 203-204).

Nesta enunciação, há evidências de que o modo como a circunferência e a elipse foram estudadas por Guilherme concentraram-se na caracterização geométrica, mas sem fazer relação entre elas. E, apesar de ele identificá-las como curvas cônicas no momento da enunciação, não está explícito que essa associação tenha ocorrido na educação básica. Em seguida, perguntamos se ele estudou a parábola na educação básica.

Aí você toca em um ponto muito interessante. A parábola também, mas em um ambiente totalmente diferente. A parábola era para trabalhar "bhaskara" e só. Somente para encontrar as raízes, coeficiente "que acompanha o x^2 ". No ensino médio, eu pude relacionar as raízes da equação de segundo grau com as interseções da parábola com o eixo x ($y=0$). Isso foi como o Guilherme [falando sobre ele mesmo em terceira pessoa] percebeu o cálculo de bhaskara. Ou seja, indica, no plano cartesiano, os pontos de interseção da maneira (raiz,0). Também discutimos o que fazia ter mais de uma raiz, ou nenhuma, tudo pelo gráfico e o que isso significava algebricamente, por exemplo: tem 1 raiz só, ao realizar a conta, o delta dava 0, se não tinha raiz, o delta dava negativo. Até esse ponto, não ficava claro porque eu tinha uma raiz só, ou melhor, eu tinha claro que, ao fazer o cálculo quando o delta dava zero, já ia dar uma raiz só e, na minha cabeça, isso já mostrava um gráfico de interseção em um ponto somente com o eixo x . Daí eu já olhava para o coeficiente do a e já pensava: [a parábola] é pra cima ou pra baixo, isso já ficava claro. Pra mim, não era tão claro a interseção com o eixo y . Isso eu posso relatar com certeza porque realmente eu levei um tempinho pra entender onde que dava a interseção com o eixo y , sabe? Nesse quesito de avaliar a parábola, era mais nesse ponto mesmo e era essa relação algébrica, não tinha nenhuma conversa, por exemplo, se você tem uma raiz com número negativo, não tem raiz real. Então ficava nisso. A discussão não passava desse ponto. Tanto que pensar na relação da distância do foco aos pontos iguais à distância da diretriz aos pontos veio só na graduação. (FERREIRA, 2019, p. 204).

Pelo exposto, a noção de parábola tem sua origem enquanto gráfico de uma equação. Alguém poderia corrigir e dizer gráfico de função, mas não, Guilherme não cita o conteúdo função de segundo grau (não que não tenha estudado). Em sua afirmação, o gráfico da parábola foi utilizado para analisar relações algébricas na fórmula de Bhaskara. Já na graduação, o objeto foi constituído pelas relações de equidistância entre foco e diretriz. Isso se mostra como justificação de Guilherme ao afirmar, em seu diário, que, dentre as cônicas, é sobre a parábola que sabe alguma coisa algebricamente. Continuamos perguntando sobre a hipérbole.

Hipérbole? Esquecida. Não vi nada no ensino médio. Apesar de hoje ter uma ideia clara de que ela não é a junção de duas parábolas. (FERREIRA, 2019, p. 204).

A noção de hipérbole surge apenas na graduação, no contexto da Geometria Analítica, como afirmado anteriormente, porém a sua expressão gráfica foi significada como a junção de duas curvas (este significado também se mostra inicialmente no Grupo de Estudos, mas tratarei disso mais à frente). Por último, retomamos a pergunta se a associação de que a elipse, a hipérbole e a parábola são curvas cônicas ocorreu só na graduação.

Sim! No Ensino Médio, eram figuras. Na verdade, o termo "cônicas" chegou somente na graduação. (FERREIRA, 2019, p. 205).

Pelas respostas de Guilherme, confirmamos as inferências de que significados iniciais atribuídos à elipse, à parábola e à hipérbole caracterizam um modo de expressão gráfico (figura, gráfico de uma equação e duas parábolas juntas, respectivamente), como também de que a circunferência, a elipse e a parábola constituem objetos distintos. É importante salientar que esta constatação não impede que outros significados não gráficos possam ter sido produzidos (provavelmente, na disciplina de Geometria Analítica), mas que a noção gráfica desses corpos precede outro modo de expressão e é relevante para o sujeito.

Como veremos em outros Movimentos características deste primeiro podem estar presentes em outros, porém acrescidos de outras características.

4.2 Movimento das Cônicas que saem do cone

Como rememorado anteriormente, Guilherme cita em seu diário as três curvas como tipos de curvas cônicas. Já no primeiro encontro, após William (um dos participantes do Grupo de Estudo) ter apresentado a noção de curvas cônicas como resultado de uma seção em dois cones, Guilherme cita:

Eu não me lembro onde... surgiu uma imagem do cone com todas as... a hipérbole saindo do cone, a elipse saindo do cone, a circunferência saindo do cone, que é uma variante da elipse, eu achei muito interessante. Porque assim, você vê o nome curvas cônicas, eu nunca tinha linkado o fato de cônicas com um cone. Ninguém disse pra gente que cônicas vinham do cone. Na hora que eu vi a imagem da elipse saindo do cone, da hipérbole saindo do cone, todo mundo saindo do cone, ah por isso se chama cônicas. (FERREIRA, 2019, p. 206).

Nesta ocasião, Guilherme constituiu as curvas cônicas como a hipérbole, a elipse e a circunferência (esta como um caso particular da elipse) que saem do cone. No Movimento anterior, os significados de cônicas são atribuídos pela autoridade de um livro/professor, que nomeia figuras anteriormente legitimadas como cônicas. Já neste Movimento, a produção de significado parte de uma atribuição dada pelo sujeito, ou seja, o conhecimento não é justificado por uma autoridade externa, mas por um ato analítico da situação. Em vários momentos do Grupo de Estudos, percebemos a alternância desses tipos de legitimidades.

Ainda sobre a citação, o modo de expressão também é gráfico, visto o fato de ele se referir às imagens das curvas. Entretanto, o fato de o modo de expressão ser o mesmo, não quer dizer que o Campo Semântico (CS) é o mesmo, mas que um repertório de CS pode compor uma determinada noção.

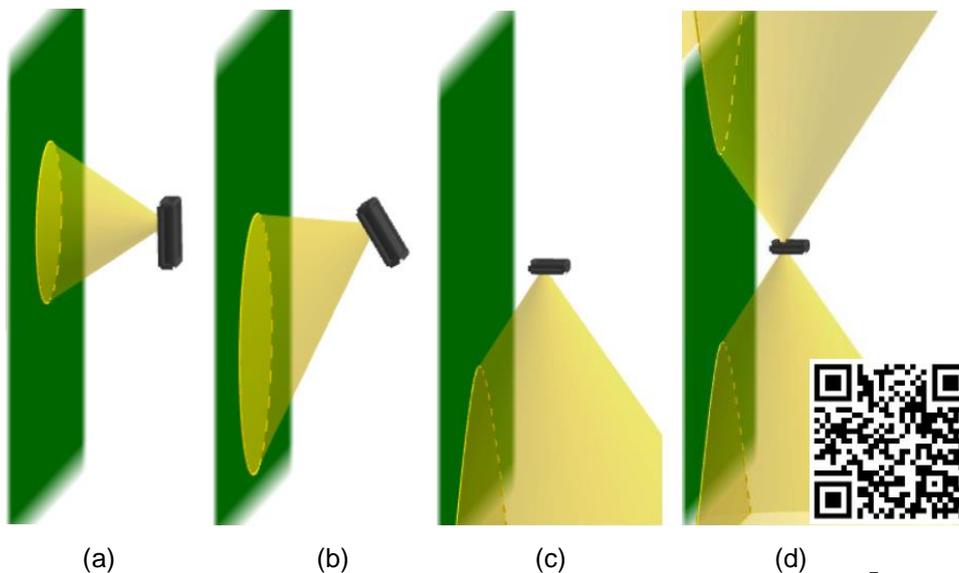
Para exemplificar, poderíamos chamar os CS operados na educação básica de *figuras geométricas*, tendo como núcleo as propriedades explicitadas da circunferência e da elipse e de suas figuras, como também o CS *gráfico de uma equação* para a noção de parábola, cujo núcleo se constitui pela figura do gráfico da equação com os eixos x e y e as relações algébricas explicitadas. Nos núcleos, é possível identificar relações geométricas, algébricas e expressões gráficas. Já na graduação, um dos CS operados refere-se à Geometria Analítica, tendo, como elementos do núcleo, a figura do gráfico da equação (mesmo da educação básica) e as relações geométricas entre foco e diretriz.

Na citação do Grupo de Estudos, mesmo William tendo afirmado que as cônicas são geradas por uma seção plana em um cone, Guilherme não explicita como as curvas “saem” do cone, mas que a imagem do cone e as cônicas permitiram a associação cognata das palavras cônicas e cone. Nesse contexto apresentamos o terceiro movimento.

4.3 Movimento das Seções Cônicas

Voltando ao Grupo de Estudos, após essa discussão oral, William ilustra no quadro como obter as curvas cônicas por meio de seções planas em um cone, porém Guilherme não produz enunciações expressando que constituiu William como interlocutor ou não. Apenas quando William muda do modelo gráfico do desenho no quadro e passa para o modelo gráfico com a lanterna do celular é que Guilherme volta a enunciar. Estas enunciações referem-se à identificação das projeções de luz nas formas de circunferência, elipse, parábola e hipérbole e na definição da posição do celular para obter cada curva.

Tenta deixar a luz dentro do círculo [...] aí a gente vê que o celular tá paralelo com o quadro [Figura 2a]. [...] Agora deixa ele menos paralelo [Figura 2b]. Isso! [William contornou com giz a projeção de luz em forma de elipse e eu perguntei se entenderam. Guilherme e os demais confirmam]. Aí depois você pode deixar... perpendicular [...] vai dar uma parábola [Figura 2c]. [intervenho e adiciono mais um celular] Ah! A hipérbole [Figura 2d]. (FERREIRA, 2019, p. 207).



(a) (b) (c) (d)
Figura 2: Projeções da lanterna do celular na parede (e QR-Code⁷).

Fonte: Ferreira (2019, p. 207).

Nas enunciações anteriores, as constituições dos objetos partiram de discussões orais ou escritas, sem a interferência de elementos visuais, requerendo uma descrição das imagens mentais. Já nesta última situação, os objetos foram constituídos mediante os significados dados a elementos visuais, ou seja, a projeção de luz foi um

⁷ Caso esteja lendo a versão em PDF, basta clicar em cima da imagem do QR-Code que, automaticamente, será encaminhado para o *link* correspondente. Caso esteja lendo a versão impressa, basta abrir o aplicativo de leitura de código de barras (como sugestão, indicamos o Barcode Scanner, disponível para Android e IOS.), direcionar a câmera para o QR-Code e, automaticamente, é fornecido um link de acesso.

elemento constituinte do objeto, pois a nomeação foi atribuída à imagem, assim como as propriedades descritas.

É importante destacar que a identificação das curvas em determinadas imagens reforçou legitimidades anteriormente estabelecidas. Já a definição da posição do celular para gerar uma curva foi legitimada mediante a experiência.

Nestes dois Movimentos, inferimos que a constituição dos objetos se deu em um primeiro momento por meio da rememoração, em que as legitimidades já incorporadas são expressas sem referências externas. Em seguida, a constituição ocorreu por meio da identificação de elementos visuais, bem como da associação de novas situações às legitimidades já assumidas. Contudo, neste momento, a produção de significado foi direta; dada a imagem, foi atribuído um significado caracterizado por uma estipulação local, ou, por associação, quando o objeto constituído foi associado a novos comportamentos incorporados a esse objeto.

4.4 Movimento das Linhas às Seções Cônicas Curvas

Neste Movimento houve a necessidade de se discutir algumas características da linha da curva cônica, pois não foi suficiente defini-las apenas como resultado de uma seção cônica, visto que nem toda interseção entre um plano e uma superfície cônica de revolução gera uma curva. Neste contexto, foi discutido se a linha da cônica é aberta ou fechada e Guilherme apresentou dois possibilidades.

[...] Euclides vê o que tá construído. Porque ali... qual a diferença da parábola para a figura de baixo [a linha em forma de S, Figura 3]? Nenhuma para Euclides, assim... tudo bem... no formato, mas no comprimento tem algum final? A parábola tem um final ali [apontando para o limite do desenho no quadro], mas a gente sabe que a parábola analítica não tem final. (FERREIRA, 2019, p. 213).

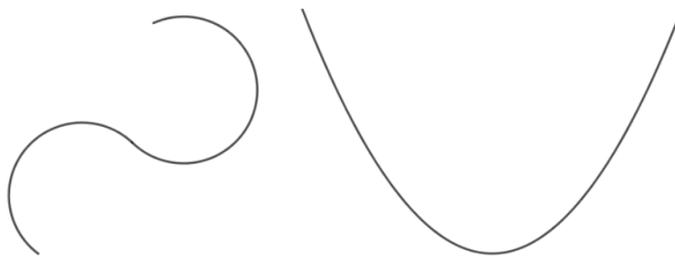


Figura 3: Desenho de uma linha em forma de S e de uma parábola.

Fonte: Ferreira (2019, p. 214).

Nesta enunciação, foram constituídos dois objetos: a parábola de Euclides e a parábola analítica, as quais são aberta e fechada, respectivamente. Trata-se de objetos distintos por conta de uma mesma característica (abertura ou não da linha) ser

diferente; conseqüentemente, são CS diferentes operados em uma mesma noção de aberto e fechado, ou seja, ter extremidades. Contudo, há uma aparente contradição. Inicialmente, Guilherme constituiu anteriormente a parábola como aberta por ser ilimitada. Após a intervenção de Bruno, ela foi constituída como fechada, sendo justificado por não possuir início nem fim, contudo a parábola analítica foi considerada como fechada por não ter início nem fim. Desse modo, a parábola, que antes foi considerada aberta por ser ilimitada, também foi considerada fechada por ser infinita. O significado de infinito foi expresso no segundo encontro, quando Guilherme retomou o assunto, apresentando a noção de aberto e fechado no barbante:

Eu pensei nesse lance de curva aberta e fechada e lembrei quando a gente estava lá no prezinho mesmo, aí pega o barbantino, daí faz a curva fechada e faz a curva aberta. Parece que a gente, tendo esse conceito de curva aberta e fechada sem pensar no lance dos pontos, que a parábola é infinita, que é isso que eu falei, de ter um conceito prévio. A gente sabe que a parábola é infinita se você não delimitar o domínio dela... mas e aí? (FERREIRA, 2019, p 214).

Para Guilherme, há contradição, por ele considerar a mesma noção (aberto como ter extremidades) para parábolas diferentes, porém a noção de aberto e fechado do barbante é incompatível com a de infinito, pois não há um cordão infinito. Isso evidencia que se trata de CS distintos; desse modo, ao operar a parábola no CS do barbante, ela é aberta e, quando operada no CS de Função, ela é fechada. Contudo, o que é legítimo para Guilherme é que a parábola é infinita, por isso a aparente contradição. Na situação houve resistência em desconsiderar uma dada legitimidade ao operar em outro CS.

Posteriormente, a discussão sobre aberto e fechado prosseguiu mas ela não foi considerada na caracterização das curvas cônicas. Inicialmente, ele considerou que as curvas cônicas não são retas e produziu o significado para um objeto curvo. Segundo Guilherme, “a partir do que foi discutido, só se pode dizer que o que é curvo é aquilo que não é reto e reto é aquilo que não é curvo”. A constituição da noção de curvo se dá pela negação do que é reto. No contexto matemático, há outras classificações para uma linha não reta diferente de curva, porém, ao operar no CS de Seção Cônica, Guilherme concebeu, como possibilidades de linhas, as presentes nas seções cônicas.

Por fim, após o encontro, Guilherme apresentou novamente uma definição para curvas cônicas. Dessa vez, ele não explicitou o fato de a seção cônica ser plana, porém sintetiza alguns aspectos que foram considerados importantes desde o primeiro encontro.

Dando início ao pensamento e construção de alguma discussão, conversamos sobre a existência das “cônicas”, e por que desse nome, qual a relação (talvez que necessária) com um (ou mais de um) cones (ou estruturas cônicas). Seções? Projeções? Depois da discussão muito girar em torno de “onde saem as curvas”, tivemos uma demonstração prática com luz. Essa demonstração prática parte da ideia de iluminar (com a lanterna do celular, no caso) a lousa e verificar aquilo que é projetado no quadro. A título informativo, chegamos à conclusão que, conforme mudamos o ângulo do celular em relação ao plano de projeção, mudamos a “cônica” que estamos projetando. Por exemplo, ao termos o celular paralelo ao plano, temos uma circunferência. Discutimos também a percepção de curvas fechadas e abertas, em diferentes visões. Por exemplo: uma circunferência é sempre uma curva fechada, diferente da visão da parábola, que graficamente aparenta ser uma curva aberta, mas sabemos ser uma curva fechada (por conhecimentos prévios). Finalmente conseguimos definir em palavras CONCRETAS, ou seja, sem mais “coisas implícitas”, o que viria a ser uma curva cônica. No caso, uma curva cônica é uma LINHA CURVA, formada a partir de uma SEÇÃO CÔNICA. (FERREIRA, 2019, p. 218).

Nesta citação, é evidente como a noção de curva cônica como seções cônicas está presente nas produções de significados, pois ela foi expressa na síntese do que foi trabalhado. Apesar de a característica de abertura não ser considerada na definição, ela foi citada como uma característica, constituindo também a noção de curva cônica. Neste sentido, houve dois objetos constituídos: as cônicas, que podem ser algumas abertas ou todas fechadas, dependendo do CS operado (no caso do barbante, delimita região e função), e as cônicas operadas no CS de seções cônicas, apresentando, como características, ser linha curva e resultado de uma seção plana em um cone.

Após o sétimo encontro, Guilherme expressou que não havia mais dúvidas sobre as possibilidades de seções planas em uma superfície cônica reta. Por esse motivo, o tema não foi mais explorado, apenas rememorado quando necessário para investigar alguma propriedade.

4.5 Movimento da(s) Cônica(s) Projetiva(s)

Neste Movimento, a característica principal foi a operação do ponto impróprio⁸ e o processo de generalização se deu pela atividade de encontrar todos os elementos nas quatro curvas conhecidas. Ou seja, ao considerarem que todas possuem os mesmos elementos, os participantes se debruçaram em verificar como eles se comportam em

⁸ Na Geometria Projetiva o ponto impróprio é um ponto infinitamente afastado. Ele pode ser imaginado como o ponto onde duas retas ditas paralelas, na Geometria Euclidiana, se encontram, desse modo, para a Geometria Projetiva não existem retas paralelas e consequentemente em uma reta há apenas um ponto impróprio.

todas as cônicas. Quanto mais elementos eram analisados, mais densa era a noção (o corpo) de curvas cônicas. É importante destacar que, no Movimento de seções cônicas, não há generalidade dos elementos; há a identificação de cada curva em determinada posição do plano de seção. A generalidade enquanto seção cônica se expressa na operação de outro CS que apresenta elementos do núcleo do CS projetivo e do CS de seções cônicas.

É a partir da operação dos elementos comuns às cônicas que Guilherme constitui o objeto cônicas projetivas como sendo um só objeto, variando a posição de determinados elementos. Alguns extratos evidenciam essa legitimação.

Se a gente pensar em um intervalo de tempo para o plano interceptando [o cone], aí vai gerar todas. E é a mesma, porque o plano não transladou, ele só está mudando a rotação. Eu queria encontrar similaridades entre elas. (FERREIRA, 2019, p. 227).

Neste extrato, Guilherme afirma que a seção gera todas as curvas cônicas e o elemento que muda é a rotação do plano. O desejo de encontrar similaridades é que conduz a análise dos objetos nas quatro curvas, permitindo, assim, a generalização. Esse processo ocorre em diferentes modelos. Ao tentar determinar a quantidade de pontos impróprios de cada cônica, Guilherme opera com o modelo da seção cônica, de modo a observar as relações entre o plano de seção com a geratriz da superfície cônica, levando em consideração a existência de um ponto impróprio. Porém, não foi apenas na seção cônica que o Movimento das cônicas projetivas se caracteriza, mas também no modelo do plano projetivo. O extrato a seguir evidencia esta operação.

Guilherme: Imagina eu a circunferência [coloca os braços em forma circular]. Onde está o foco da circunferência? o foco e o centro estão no mesmo lugar [Bruno põe o giz na posição do centro]. Agora a gente tem uma órbita [circunferência em linha vermelha da Figura 4 com os focos coincidentes]. Na hora que eu peguei esses focos que é o mesmo, e separei, o que era que minha circunferência vai virar uma elipse [linha azul da Figura 4]. Olha que elipse, aí vira uma elipse maior ainda. Na hora que esse ponto vai para o impróprio, vai lá, Bonner, ele está impróprio. Isso aqui virou uma parábola [linha amarela da Figura 4]. Porque você não vê aonde, porque na hora que você ver o próximo Foco, vai estar dando uma voltinha. Ele estava impróprio, aí vai chegar lá no outro impróprio, que é o Bruno, [Bruno enfatiza que é o mesmo ponto impróprio e Guilherme concorda]. Você já jogou um joguinho do videogame que você sai do lado e aparece do outro? Esse é o caso, ele está do outro lado, mas ele ainda é o impróprio.

Bruno: Só que lembra que a curvinha estava aqui [se referindo a lado esquerdo da curva azul da Figura 4].

Guilherme: Essa é a minha curva, minha bundinha ainda está aqui, ó.

Bruno: E a curvinha que estava do lado de cá. Aí quando vier para o lado de lá... [agora se referindo à linha verde que está à esquerda do ponto $F2''$ da Figura 4].

Guilherme: Só que ele ainda está impróprio, agora ele vai voltar a ser próprio, só que quando ele voltar a ser próprio, ele não vai voltar a ser uma elipse. O que é que virou?

Sabrina: Uma hipérbole.

Guilherme: Porque minha bundinha, que estava desse lado, veio para esse outro lado aqui. Aí, a discussão que a gente chegou é: Lembra? estava assim [linha azul da Figura 4]. O centro estava no meio. Na hora que eu fiz assim [linha verde da Figura 4]... o centro está...?

Sabrina: So far away.

Guilherme: Entendeu? É isso que a gente estava falando, elas vão virando uma na outra.

Sabrina: É tudo uma coisa só. (FERREIRA, 2019, p. 227-228)

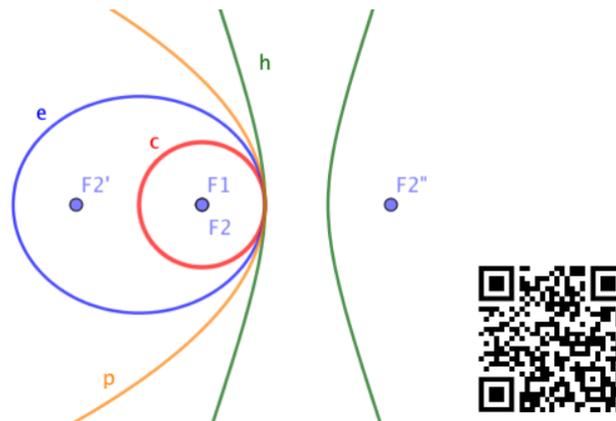


Figura 4: Generalização das cônicas (e QR-Code).
Fonte: Ferreira (2019, p. 228).

Pelo extrato, é possível observar que Guilherme constitui a cônica pela operação dos focos e da posição relativa da concavidade da curva e do centro com os focos. Desse modo, o CS operado não apresenta nenhum elemento referente às seções cônicas, indicando ser outro CS que o operado no primeiro encontro. Esta observação me permite inferir que, inicialmente, um dado novo necessita de outras legitimidades para validá-lo; posteriormente, quando este novo dado é considerado como uma estipulação local, o núcleo do CS se modifica, não sendo mais necessário.

4.6 Movimento das Cônicas Analíticas

Para Guilherme, o processo de produção de significado para cada tipo de cônica ocorreu de modo distinto. Apresentamos neste artigo a situação em que ele assumiu o papel de condutor da discussão, que foi sobre a elipse.

Assim como na circunferência, as propriedades consideradas por Guilherme foram específicas da elipse, constituindo-a como “o lugar geométrico cuja medida da soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é uma constante” (FERREIRA, 2019, p. 231). Na sua expressão gráfica, ele pôs a elipse também com o centro fora da origem e a curva tangenciando os eixos (Figura 5).

Na operacionalização da expressão algébrica, ele relatou:

Cheguei a uma expressão “linda” [tom de ironia] que não me dizia nada, não consegui colocar em função de x e y , ela tinha muitos valores que não seriam úteis e eu sabia que a elipse tem x , y , a e b . (FERREIRA, 2019, p. 231).

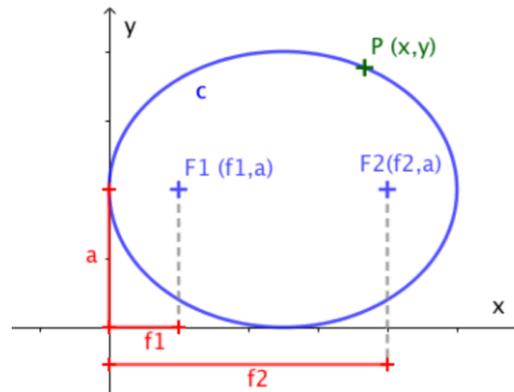


Figura 5: Posição da elipse em relação aos eixos do plano cartesiano.

Fonte: Ferreira (2019, p. 231).

Esta citação evidencia a atividade na qual Guilherme estava envolvido, que era a de deduzir uma equação para a elipse em função de x , y , a e b , ou seja, já há uma legitimidade considerada para a expressão algébrica da elipse. Segundo o relato do sujeito, os parâmetros adotados não permitiram que ele chegasse a uma expressão que considerasse legítima. Apesar de não ter acesso à operacionalização, devido ao fato de o sujeito não ter guardado o papel com os cálculos (pois fez em casa), é possível verificar, pela citação, que Guilherme não estabeleceu uma coerência entre o significado produzido por ele e os que ele esperava serem produzidos dentro de um contexto matemático para a expressão encontrada⁹. Ou seja, ele não legitimou a sua produção de significado dentro daquela atividade. Essa estagnação fez com que ele procurasse alguma referência para saber quais elementos deveria utilizar para deduzir uma equação, ou seja, a sua dificuldade não estava na operacionalização algébrica em si, mas na escolha de elementos que permitissem chegar a uma equação considerada legítima.

4.7 Movimento das Construções Gráficas das Cônicas

⁹ A fim de fazer uma leitura de uma possível expressão encontrada por Guilherme, tomamos a expressão exposta no quadro $(d(P, F1) + d(P, F2) = k)$ e a desenvolvemos com base nos parâmetros da Figura 6 $(\sqrt{(x - f1)^2 + (y - a)^2} + \sqrt{(x - f2)^2 + (y - a)^2} = k)$ encontrando uma extremamente longa, não sendo considerada por nós usual. Neste sentido, produzimos significado para o termo “cheguei a uma expressão linda” como uma expressão longa não passível de ser simplificada.

Neste último movimento a principal característica é a operação sintética (gráfica) das cônicas no quesito de construí-las utilizando a noção de lugares geométricos. Diferente do Movimento Analítico, o lugar geométrico não foi pensado como uma equação e sim como um desenho, sendo um dos principais diferenciais. Outra característica a ser destacada é que no Movimento das Construções foi operado noções de generalizações das construções, diferente do Movimento Analítico em que as noções se restringiram a características particulares de cada curva.

A seguir, apresentamos um exemplo de generalização por meio de analogias entre as construções.

William: Então essa reta ortogonal a P [$P'C$ da Figura 6 à direita] na verdade é a reta $P\hat{F}1$ [Figura 6 à esquerda]?

Guilherme: É! Cadê o segundo foco da parábola? No impróprio.

Bruno: Então tem que estar sobre essa reta [a]. E onde é que ele vai encontrar? Aqui [na elipse], você não sabe que os focos estão alinhados com o vértice? Então onde está o vértice aqui [na parábola]? Quando eu alinhar vértice com foco...

Guilherme: Uau, eles vão se encontrar no além, my Gosh.

William: O fato dele fazer essa reta [a] ortogonal é justamente ele ligar o P com $F1$ [na elipse]. (FERREIRA, 2019, p. 247).

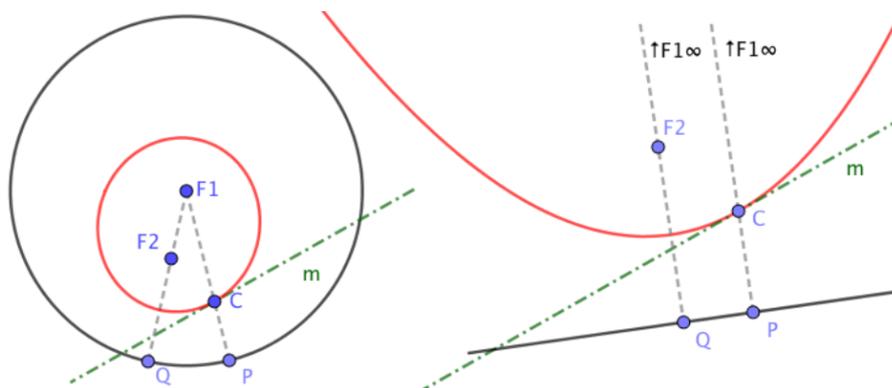


Figura 6: Analogia entre a construção da parábola e da elipse.
Fonte: Ferreira (2019, p. 231).

Esta analogia entre os elementos dos modelos também ocorreu na construção da hipérbole. Para as três curvas (parábola, elipse e hipérbole), foram explorados dois métodos construtivos. No primeiro, os pontos das curvas foram determinados pelas interseções de lugares geométricos dos pontos do plano que são equidistantes (LGE), tomando por referência um ponto (correspondente a um dos focos) e o elemento diretor da curva, ou seja, a circunferência para a elipse e a hipérbole; e a reta (que projetivamente correspondeu à circunferência de centro impróprio) para a parábola, cujos LGE são, respectivamente, uma circunferência e um par de circunferências concêntricas e equidistantes, ou um par de paralelas equidistantes quando for a reta

(que também correspondem projetivamente às circunferências de centros impróprios). O segundo método tem por referência a interseção de um dos raios focais e a mediatriz entre o outro foco e um ponto do elemento diretor.

No processo de analogia, apenas na parábola foram realizadas associações entre os métodos 1 e 2 (Figura 7). As demais associações ocorreram entre curvas diferentes para um mesmo método. Nem todas as analogias desse Movimento envolveram características projetivas pois, para tal, seria necessário que os elementos associados fossem impróprios para uma das curvas. Neste sentido, tanto as associações entre os métodos 1 e 2 da parábola como entre o método 1 da elipse e 1 da hipérbole não envolveram relações projetivas, apenas euclidianas.

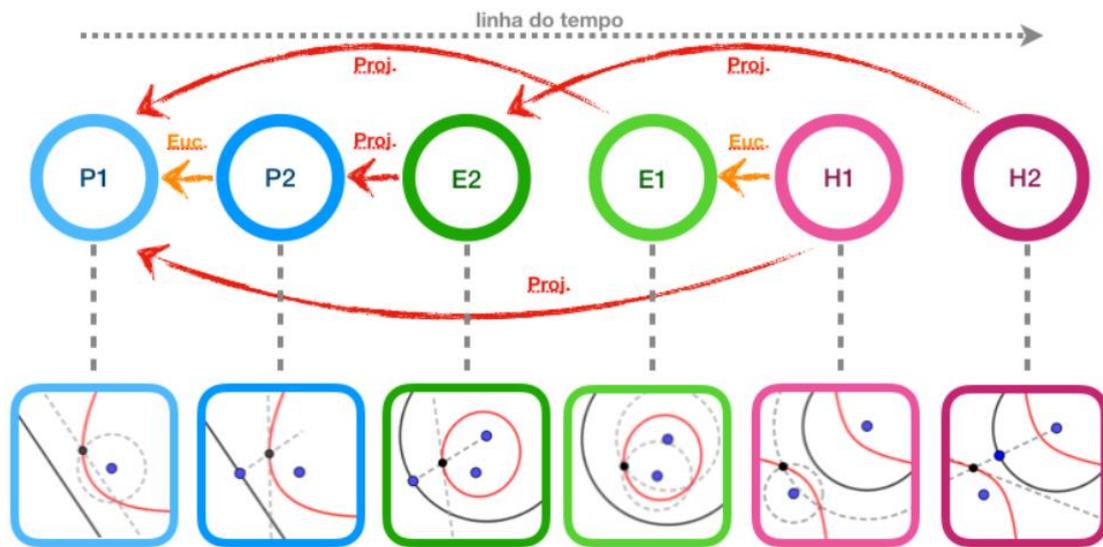


Figura 7: Esquemas de analogias entre os métodos construtivos das cônicas¹⁰.
Fonte: Ferreira (2019, p. 248).

5 Algumas considerações

O presente artigo apresentou um recorte dos principais resultados de uma pesquisa realizada em um Grupo de Estudos no intuito de compreender como o processo de produção de significado para as curvas cônicas ocorreu. Esse processo se deu de modo dinâmico e não linear e, como observa Silva (2003), não há uma dinâmica, mas dinâmicas que compõem o sistema.

Uma característica importante a ser destacada na pesquisa foi a constituição dos objetos que ocorreu mediante os elementos operados em cada Movimento. Os objetos constituídos estão diretamente ligados aos modelos e à estrutura semântica envolvida.

¹⁰ As notações *P*, *E* e *H* correspondem aos métodos aplicados à parábola, elipse e hipérbole, respectivamente. Os índices 1 e 2 correspondem ao primeiro ou segundo tipo de método construtivo aplicado às cônicas.

Neste sentido, como afirma Lins (2012), ao se operar em CS diferentes, são constituídos objetos distintos. Desse modo, não houve um único objeto, mas a noção de curvas cônicas foi composta por todos os objetos das cônicas, que se expressaram nos diferentes Movimentos, constituindo um corpo: Curva Cônica.

Este corpo englobou basicamente os quatro tipos de curvas cônicas, as quais inicialmente apresentavam características particulares, mas depois são generalizadas como seções cônicas e posteriormente distinguidas entre seções e curvas cônicas pelo estudo da natureza das linhas. Apesar da generalidade, suas particularidades, que se mostraram como legitimações enraizadas, apareciam em meio às novas informações e produções de significado. Dentre essas legitimações, destaca-se que os tipos de cônicas mais tratados foram a elipse e a parábola, as quais serviram de base para analogias para as outras cônicas.

Os significados distintos mais presentes para os tipos de curvas cônicas foram: Circunferência como conjunto de pontos equidistantes ao centro; Parábola como conjunto de pontos equidistantes do foco e da diretriz; Elipse como o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias dos focos ao ponto da curva é constante; Hipérbole como duas parábolas.

Os significados que generalizaram as curvas compreenderam: Cônicas como curvas planas fechadas resultantes de uma seção cônica; Lugares geométricos dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência.

A noção de ponto impróprio foi importante para o estudo das generalidades dos elementos e dos métodos construtivos das cônicas, pois foi por meio dessa noção que situações usualmente apresentadas como distintas puderam ser tratadas como análogas. A característica de generalidade se estabeleceu tanto no Movimento das Seções Cônicas como no das Cônicas Projetivas, por meio dos modelos operados (Vista da Seção Cônica, Geogebra 3D e Plano Projetivo). Nesses modelos, destacamos os elementos generalizadores: ponto impróprio da curva como local onde a curva fecha; e posição relativa dos focos.

Os Movimentos perpassaram três abordagens: seção cônica, estudo analítico e construções. As duas últimas restringiram-se ao estudo em um espaço bidimensional das curvas, já o primeiro envolveu modelos de situações tridimensionais, assim como de espaço bidimensional para compreender aspectos tridimensionais. Neste último, houve o caso da Vista da Seção Cônica, em que os elementos operados foram tratados como objetos do plano.

Dentre os modos de produção, os classificamos como: imaginação, observação, manipulação. Dentre esses modos, foi observado que o Imaginativo envolveu mais lembranças. E, dentre os modos, o de manipulação foi o que melhor apresentou retorno de informações, ou seja, os significados que foram internalizados e citados em outros encontros referiam-se, em sua maioria, a situações em que Guilherme estava manipulando com as expressões. No caso do primeiro e do segundo Movimento, os modos de produção de significado restringiram-se à imaginação. Nos demais, não houve um padrão.

Sobre os modos de expressão/enunciação, destacamos: natural escrito, natural oral, gestual, gráfico, algébrico.

Com relação à expressão gráfica, a diferenciação de cores contribuiu para a produção de significado por Guilherme. Neste sentido, considero que deve ser um elemento a ser levado em consideração ao se elaborar um modelo.

Dentre os modelos operados ao longo dos Movimentos, destaco os seguintes: Lanterna; Vista da Seção Cônica; Seção Cônica; Plano Euclidiano; Plano Projetivo; e Plano Cartesiano.

Os elementos considerados comuns para todas as cônicas foram: 2 focos, 4 vértices, 2 centros, 2 eixos de simetria, linha fechada, 2 círculos diretores, tangentes, excentricidade, raios vetores; elementos impróprios e regiões interna e externa.

Pela pesquisa, da qual apresentamos um recorte, é possível verificar que não apenas o trabalho de diferentes expressões é suficiente, mas é necessário olhar para o núcleo do CS operado, a fim de identificar quais elementos podem ser associados, pois dependendo do modelo que se opere, não é possível fazer analogias, por tratar de elementos distintos. Neste sentido, podemos observar que a noção de curvas cônicas, nos seus diversos Movimentos, foi produzida a partir da operação dos elementos dos objetos constituídos e como esses elementos se relacionam nos diferentes modelos.

Agradecimentos

Agradecemos aos participantes do Grupo de Estudo pela disponibilidade e colaboração com a pesquisa, ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática pelas contribuições no trabalho, à Universidade Federal de Pernambuco pelo afastamento concedido permitindo a dedicação exclusiva à pesquisa e ao Comitê Editorial da RBEG pelo convite para publicação do artigo.

Referências

- AYER, A. J. Filosofia do Conhecimento. *The problem of knowledge*. Tradução Jaimir Conte. London: Macmillian & Co LTD, 1956. p. 1–34.
- BERLO, D. K. *O processo da comunicação: introdução à teoria e à prática*. São Paulo: Martins Fontes, 1979.
- FERREIRA, A. C. *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- FERREIRA, B. L. “O que sabem sobre as curvas cônicas?” *Uma possível leitura para o processo de produção de significado em um Grupo de Estudos*. 2019. 269 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019.
- FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.
- LEONTIEV, A. N. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. Tradução Maria da Pena Villalobos. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2011. p. 59–83.
- LINS, R. C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. DE C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. 4^o ed. São Paulo: Cortez, 2012a.
- LINS, R. C. Notas sobre o uso da noção de conceito como unidade estruturante do pensamento. In: MOREIRA, M. A. (Org.). *Atas da III Escola Latino-americana sobre Pesquisa em Ensino de Física - III ELAPEF*. Canela: [s.n.], 1996. p. 137–141.
- LINS, R. C. O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. *et al. Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história*. São Paulo: Editora Midiograf, 2012b. p. 11–30.
- MURPHY, C.; LICK, D. *Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning*. Califórnia: Corwin, 1998.
- PIAGET, J. *Epistemologia Genética*. 4^o ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2012.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- SILVA, A. M. DA. *Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática*. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2003.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 14, p. 66–91, 2000.

SOUSA, N. DOS S. DE. *Curvas Cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica*. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.