

VISUALIZAÇÃO EM AMBIENTES DINÂMICOS COMO FACILITADOR NO ENSINO DE SIMETRIAS E PAVIMENTAÇÕES¹

Daniele Simas Pereira Alves²

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa³

João Domingos da Silva Junior Gomes⁴

Resumo: Neste trabalho é apresentado um relato de atividades propostas para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, onde se introduz e se aplica o conceito de simetria axial. Ao todo, são sugeridas vinte tarefas que valorizam a visualização e representações que foram executadas em sala de aula com o auxílio dos professores e que são de correção/verificação automática. Na sequência desse estudo, são desenvolvidas as ideias de simetria em eixos não paralelos, tendo em vista a obtenção de pavimentações e de bases geradoras das mesmas, finalizando a ação dos alunos com a construção de um caleidoscópio, sempre valorizando as representações visuais. Os conceitos, atividades e ideias foram introduzidos e explorados usando o software de Geometria Dinâmica (GeoGebra) de maneira sequencial e com dificuldade gradativa.

Palavras-chave: Visualização, simetria, bases geradoras, pavimentação, GeoGebra.

Abstract: This paper presents a description of an activity performed by students of the 6th grade of elementary school, where the concept of axial symmetry is introduced and applied. All the tasks proposed value visualizations and representations and were executed in the classroom under the supervision of teachers. The ideas of symmetry in non-parallel axes, tessellation and generated bases, were developed. The action ended with construction by the students of a kaleidoscope. Concepts, activities and ideas were introduced and exploited with the Dynamic Geometry (GeoGebra) software, the tasks were sequentially and with a gradual difficulty.

Keywords: Visualization, symmetry, generated bases, tessellation, GeoGebra.

¹ Versão ampliada do artigo publicado nos Anais do XIII Graphica

² Prefeitura Municipal de São Gonçalo. daniele.simas@gmail.com

³ Colégio Pedro II/NEPEM (Núcleo de Estudos e Pesquisas em Ensino de matemática).
imgccosta@gmail.com.

⁴ Colégio Pedro II/NEPEM. joao.dgomes@gmail.com.

1 Introdução

O papel da visualização no processo de ensino de matemática tem sido discutido e estudado por diversos educadores. As propostas metodológicas presentes nos textos de referência da educação brasileira, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugerem o uso de ferramentas tecnológicas e visuais, aproximando, assim, os estudantes da sua realidade cotidiana e levando-os a desenvolver diferentes competências presentes nesses documentos.

A visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de modernos recursos para produzir imagens, impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. (BRASIL, 1998, p.46)

O A visualização em matemática é um processo de formar imagens, sejam elas mentais, com lápis e papel ou, até mesmo, com auxílio de tecnologias para que tais imagens sejam efetivamente usadas na descoberta e compreensões de conceitos matemáticos. A inserção desses recursos visuais passa pela transformação da sala de aula num ambiente atrativo e dinâmico para os alunos, onde esses devem ser provocados e, deste modo, desafiar e estimular o raciocínio e a criatividade, através do uso de novas tecnologias, principalmente voltadas para a visualização.

O ensino da Matemática está inserido nesse contexto, sendo assim, torna-se necessário buscar sempre diferentes maneiras de atrair o aluno para o que é ensinado e usar, na prática da sala de aula, a sua experiência.

Os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns a realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente a informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados como objetos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objetos ou ideias que nunca foram vistos. (GOLDENBERG, 1998, p.37)

Em seus estudos, o psicólogo Raymond Duval buscou analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino-aprendizagem. Nesses trabalhos, evidenciou a importância e a necessidade do uso de representações nos estudos de objetos matemáticos, uma vez que todo pensamento matemático é expresso através registros que devem ser explorados a fim de possibilitar a construção do conhecimento. Ou seja, Duval propõe que a efetiva aprendizagem das propriedades de

um objeto ocorre justamente na passagem de um registro para outro, pois as diferentes representações apresentam conteúdos e atributos diferentes sobre um mesmo objeto.

Descartar a importância da pluralidade dos registros de representação leva a crer que todas as representações de um mesmo objeto matemático têm o mesmo conteúdo ou que seus conteúdos respectivos se deixam perceber uns nos outros como por transparência. (DUVAL, 2003, p.14)

Seguindo o raciocínio de Duval, no presente artigo descreve-se um conjunto de atividades para efetuar o estudo de simetrias e sua aplicação a pavimentações, recorrendo à utilização de um software de geometria dinâmica (GeoGebra), valorizando a visualização e representações em todos os processos de construção do conhecimento. Utilizou-se tal software, pois o mesmo é livre e permite realizar facilmente construções geométricas, proporcionando uma melhor compreensão dos objetos geométricos.

O recurso ao computador, em detrimento de materiais manipuláveis, tem duas justificativas: o rigor das construções e a rapidez para se obter uma pavimentação do plano, confirmando ou não conjecturas que se possam colocar sobre simetrias e possíveis bases geradoras das pavimentações.

Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática". (BRASIL, 2006, p.87)

Os estudos sobre a utilização de caleidoscópios no ensino de geometria têm sido objeto de interesse de diversos pesquisadores no Brasil. Em Batistela e Santos (2013) podemos ver uma cronologia sobre a utilização desse tema nos processos de ensino aprendizagem.

Educadores matemáticos reconhecem o grande potencial que tem a visualização, porém falta efetividade na sua implementação. Isso se deve, principalmente, ao fato dessa ser uma habilidade de difícil desenvolvimento, necessitando de um trabalho refletido e árduo para seu aperfeiçoamento e para seu ensino. Além disso, para a maioria dos alunos, é como se existisse uma deficiência heurística visual de interpretação geométrica.

Estamos aqui diante de um importante campo de pesquisa. Mas parece ainda muitas vezes negligenciada porque a maioria dos estudos

didáticos é centrado principalmente em um lado da atividade matemática, como se os processos matemáticos fossem naturais e cognitivamente transparentes. (DUVAL, 1999, p.24)

Autores/educadores como Amado, Sanchez e Pinto (2015) têm utilizado visualizações não só para resolver problemas, como também para demonstrar matematicamente teoremas, proposições e conjecturas. Outros autores, como Gravina e Santarosa (1998), Penteado e Borba (2003) e Maltempi (2004), reforçam o uso de tecnologias de informação e computação no processo de aprendizagem, além de destacarem a incorporação das mesmas na sala de aula. Dessa forma, esses autores privilegiam, sobretudo, a construção de conceitos através da visualização.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: a seção 2 refere-se à metodologia utilizada; na seção 3, são apresentados alguns conceitos geométricos básicos para o desenvolvimento do trabalho; já a seção 4 descreve as atividades aplicadas e os resultados obtidos; e, para finalizar, na seção 5, mencionam-se as conclusões sobre o processo de aplicação das atividades elaboradas.

2 Metodologia

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, já que o processo é mais importante que o produto. As investigações de natureza qualitativa estão predominantemente orientadas para o que se passa no terreno, pois é através de narrativas que se fornece ao leitor informações acerca da experiência realizada.

Segundo Geelen (2007, p.140), “as narrativas acerca das aulas são poderosas porque têm em conta não só as práticas correntes e as situações, mas também, as experiências passadas dos professores e as suas futuras aspirações”.

Além da pesquisa qualitativa, procura-se unir a pesquisa à ação ou prática, isto é, desenvolver o conhecimento e a compreensão como parte da prática; daí se enquadrar no registro da pesquisa-ação.

Esta metodologia exige uma estrutura de relação entre os pesquisadores e as pessoas envolvidas no estudo da realidade do tipo participativo/coletivo. Assim, de acordo com Baldissera (2001, p.6), “uma pesquisa pode ser qualificada de pesquisa-ação quando houver realmente uma ação por parte das pessoas implicadas no processo investigativo e estar centrada no agir participativo e na ideologia de ação coletiva”. Ela agrega várias técnicas de pesquisa, recorre a técnicas de coleta e interpretação de dados, intervenção e solução de problemas, bem como técnicas de dinâmica de grupos.

Aplicando essas ideias ao ensino, a pesquisa-ação revelou-se como um instrumento eficiente para o desenvolvimento profissional do professor, além de ser um instrumento

valioso a que os professores podem recorrer, para melhorar o processo de ensino-aprendizagem. No entanto, segundo Engel (2000, p.190), “considerando as limitações atuais da teoria educacional, a pesquisa-ação leva a soluções imediatas para problemas educacionais urgentes, que não podem esperar por soluções teóricas”.

Por ser investigativa e participativa, supõe um conjunto de procedimentos técnicos e operativos para o conhecimento da realidade ou um aspecto desta, com o objetivo de transformá-la pela ação coletiva, como também, supõe uma co-implicação no trabalho dos pesquisadores e das pessoas envolvidas no projeto onde se faz intercâmbio, socialização das experiências e conhecimentos teóricos e metodológicos da pesquisa.

3 Conceitos geométricos necessários

Um dos objetivos presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o segundo ciclo do Ensino Fundamental é “identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções.” (BRASIL, 1998, p.56)

Ao utilizarmos um material didático é absolutamente necessário ter cuidado de analisar se o mesmo satisfaz e proporciona a obtenção de um dos objetivos precípuos do processo de ensino e aprendizagem, que é a compressão dos conceitos estudados. (MURARI, 2011, p.193)

A simetria pode ser considerada como a invariância de uma figura ou forma sofrendo algumas transformações, desde que não exista deformação. As simetrias podem ser de diferentes tipos: axiais ou de reflexão, translação, rotação e de inversão. A simetria utilizada no estudo será a axial ou de reflexão.

Como ação preparatória da atividade, foram apresentados aos alunos vários exemplos de figuras simétricas, levando-os a intuir o conceito de simetria axial ou reflexão.

Simetria Axial: Dados uma reta r e um ponto P . Se P não pertence a r , a imagem de P em relação a r é o ponto $P' = s(P)$ tal que a reta r é a mediatriz do segmento PP' . Se P pertence a r , a imagem de P em relação a r é o próprio P , $s(P) = P$ (Figura 1).

Então, dizemos que $s(P)$ é o **simétrico** de P em relação a r , que é considerada o **eixo de simetria** ou espelho de reflexão. Decorre da definição que PP' é perpendicular a r e M é ponto médio do segmento.

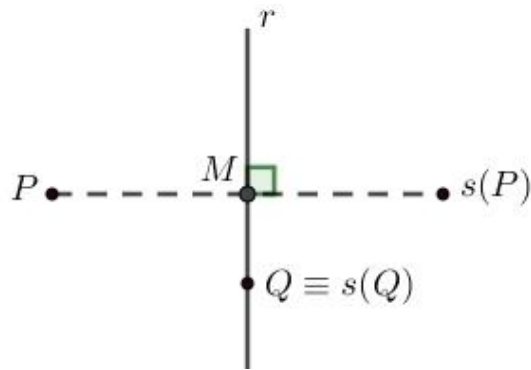


Figura 1 - Simetria axial

Pavimentação: Uma pavimentação do plano euclidiano pode ser definida como sendo uma família enumerável de conjuntos fechados que (re)cobrem o plano sem lacunas ou sobreposições.

Para Lourenço (2014, p.11) “uma pavimentação é o recobrimento de uma superfície com ladrilhos (peças) sem deixar espaços intermediários nem sobreposições” (Fig. 2).

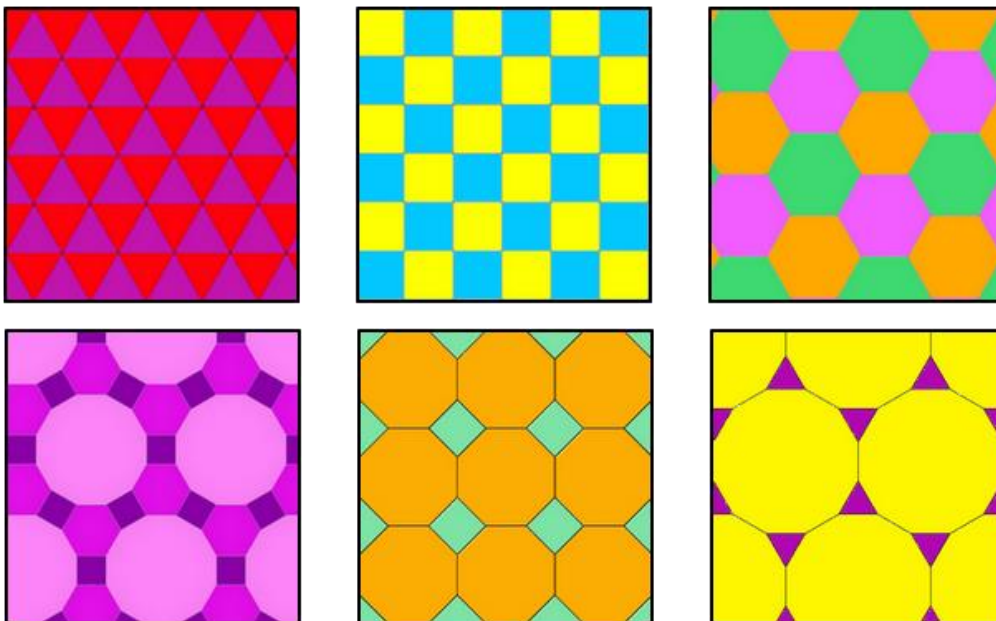


Figura 2 - Pavimentações por polígonos regulares

As pavimentações podem ser obtidas utilizando-se um conjunto de 3 ou 4 espelhos e uma imagem no interior deles. À imagem mínima⁵ (ou minimal) que dá origem a uma pavimentação através das reflexões nos espelhos dá-se o nome de **base geradora** e

⁵ Imagem mínima ou minimal é aquela que ao se lhe retirar qualquer elemento, não irá gerar a pavimentação.

às sucessivas imagens refletidas pela base geradora, dão-se o nome de **base transformada** (Figura 3).

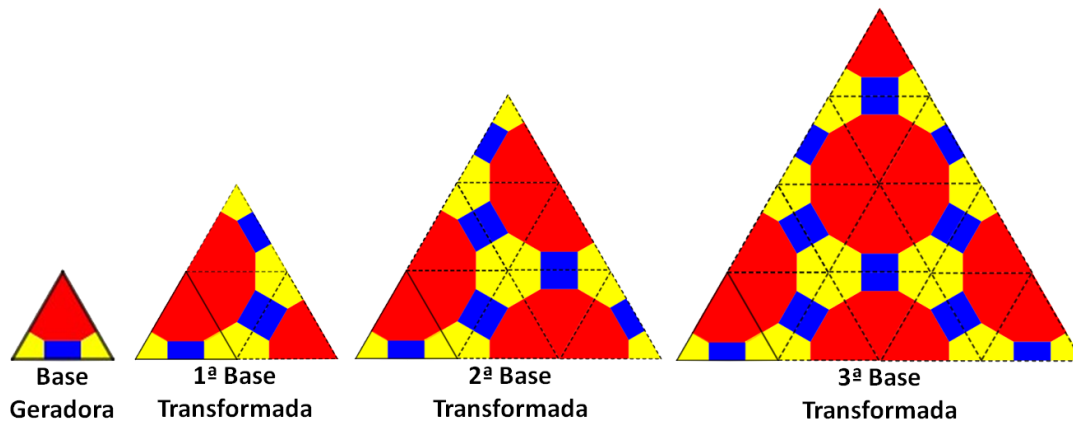


Figura 3 - Base geradora e bases transformadas de uma pavimentação formada por quadrados, hexágonos e dodecágonos

Caleidoscópio: “Caleidoscópio é qualquer conjunto de espelhos planos, perpendiculares a um mesmo plano, que possibilite a reflexão perfeita de imagens. Existem caleidoscópios com dois, três e quatro espelhos.” (MARTINS, 2003, p.55) (Figura 4).



Figura 4 - Caleidoscópios e imagem formada no interior de um caleidoscópio.

Os caleidoscópios populares são tubos cilíndricos, com espelhos planos dispostos em seu interior de maneira a formar prismas regulares e, fechados por duas tampas. Uma das tampas possui pequenos vidros ou pedras coloridas e, a outra tampa possui um orifício que permite a visualização do interior do prisma. Ao girar-se o cilindro os pedaços de vidro movem-se gerando belas imagens, uma vez que as imagens formadas por um dos espelhos originam novas imagens nos demais espelhos refletindo *ad infinitum* (Figura 5).

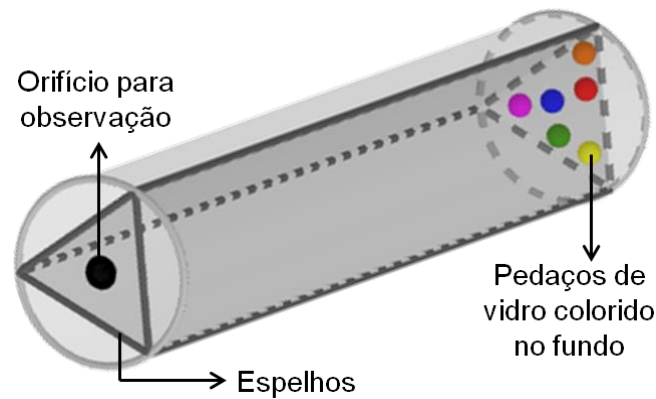


Figura 5 - Caleidoscópio popular

Para que a repetição de imagens pelos três espelhos ocorra de modo que as imagens geradas sejam idênticas ao objeto no interior dos mesmos, e que não exista sobreposição de imagens, os ângulos formados pelos espelhos, dois a dois, devem somar um ângulo raso e, o dobro da medida da amplitude de cada um desses ângulos deve dividir 360° . Desta forma, os possíveis valores para os referidos ângulos são $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$. A cada um dos ternos anteriores corresponde um tipo de caleidoscópio triangular com espelhos planos: o equilátero, o isósceles retângulo e escaleno retângulo (Figura 6). Esgotam-se, assim, as possibilidades de construção de caleidoscópios triangulares.

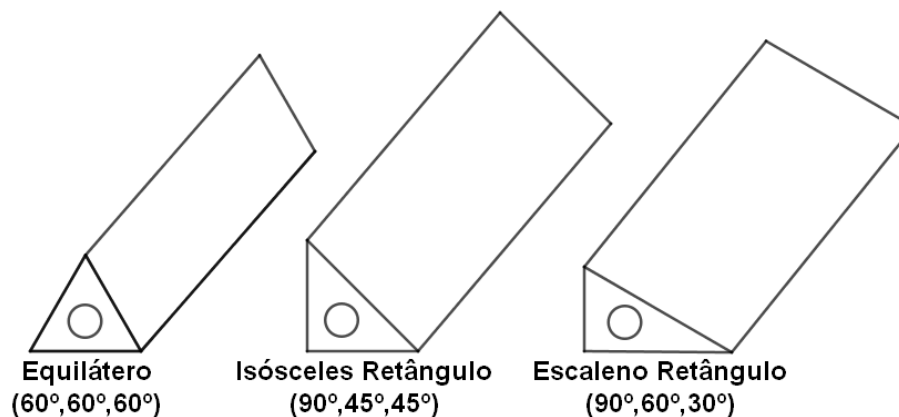


Figura 6 - Caleidoscópios de base triangular

É imediato ver a conexão entre o estudo de caleidoscópios e de pavimentações do plano, que, quando feitas por polígonos regulares, permitem a exploração de vários conceitos, como simetrias, ângulos, construção de polígonos, paralelismo e perpendicularismo.

Como referido em Alves (2019), para obter-se uma base geradora e sua respectiva base transformada é necessário um estudo relativo às linhas de simetria dos polígonos que as formam. Traçando-se as linhas de simetria da pavimentação, que são as linhas

de simetria dos polígonos regulares, é possível obter a base geradora da pavimentação. Tomando como base uma pavimentação formada por quadrados, hexágonos e dodecágonos, traçam-se as linhas de simetria reflexional de cada um dos polígonos (linhas tracejadas na Figura 7) e, em seguida, são consideradas as linhas que coincidem nas simetrias reflexionais. Unindo-se essas linhas em suas interseções, obtém-se a base geradora (triângulo em cor preta na Figura 7) da pavimentação estudada.

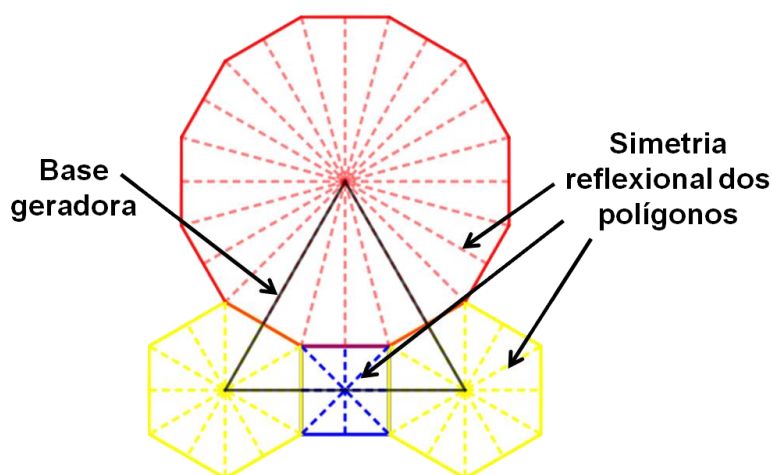


Figura 7 - Estudo da base geradora da pavimentação composta por quadrados, hexágonos e dodecágonos

4 Atividade

A seguir, descreve-se uma atividade desenvolvida com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental do Rio de Janeiro, que teve como objetivo principal a determinação de bases geradoras de pavimentações do plano, recorrendo a espelhos, e que culminou com a construção de um caleidoscópio.

A execução da atividade teve dois momentos distintos: a manipulação de modelos e o uso do GeoGebra. Vamos deter-nos sobre o segundo momento por ter sido realizado com a utilização de um ambiente de geometria dinâmica. Uma vez que as reflexões em caleidoscópios resultam de simetrias axiais, e como os alunos não estavam familiarizados com este conceito, houve a necessidade de se iniciar por algumas tarefas introdutórias do mesmo. Em seguida, os alunos, em duplas, realizaram as tarefas no laboratório de informática do colégio.

A apresentação das tarefas foi dividida em três fases. Na primeira, foram apresentadas várias imagens para intuir o conceito de simetria axial, e, em seguida, foi efetuada a formalização do mesmo. Como momento de fixação, foram apresentadas aos alunos algumas questões em que se recorre apenas a um eixo de simetria. Na segunda fase, os alunos continuaram o estudo sobre simetrias axiais, utilizando, agora,

dois eixos concorrentes. Neste estudo, foi utilizada a ideia de que os eixos são dois espelhos não paralelos, de modo que seja possível estudar as reflexões por eles originadas. Na terceira fase das atividades, os alunos realizaram um estudo sobre as bases geradoras de pavimentações, utilizando ora as bases geradoras, ora as pavimentações.

4.1 Recurso ao GeoGebra para pesquisar eixos de simetria em figuras planas

Nas tarefas 1 e 2 (Figura 8), foi usada uma malha quadriculada, contendo dois polígonos congruentes (triângulos e quadrados, respectivamente) e uma reta. Os alunos deveriam posicionar a reta no lugar exato entre os dois polígonos, de forma a existir uma simetria axial que transforma um no outro. No primeiro caso, a reta pode ser manipulada (arrastada) apenas por meio de translações para a esquerda ou para a direita. Já no segundo caso, a reta pode ser manipulada livremente, isto é, pode se movida por meio de translações ou de rotações.

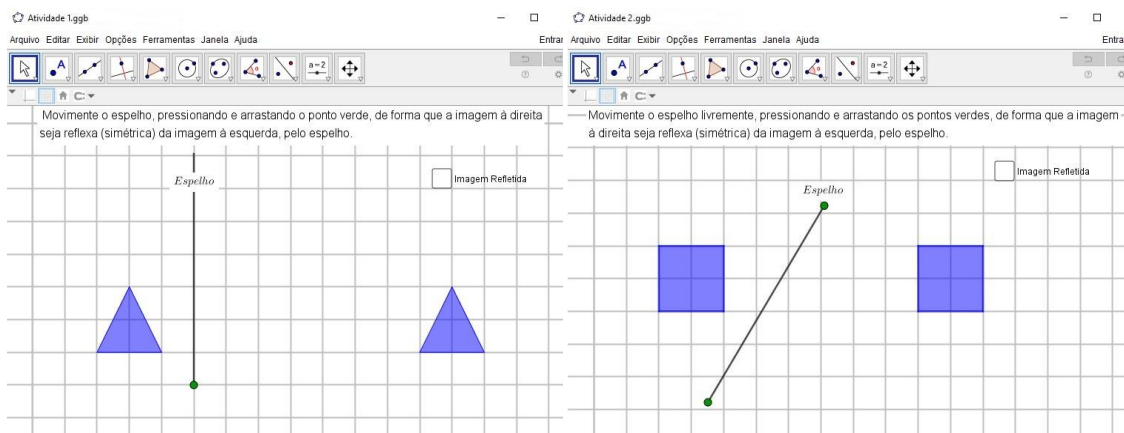


Figura 8 - Visualização das tarefas 1 e 2, propostas aos alunos

As tarefas 3, 4 e 5 trabalham o conceito de simetria, usando pontos. A primeira apresenta um conjunto de 5 pontos, um eixo fixo (r) e um conjunto de 5 pontos livres, a serem movimentados e posicionados de modo a obter as imagens dos pontos fixos pela simetria de eixo r (Figura 9). As outras duas tarefas são semelhantes às anteriores, havendo dois conjuntos de pontos fixos e uma reta que pode ser movida e posicionada de forma a ser o eixo de simetria da figura, sendo que na tarefa 4 o eixo apenas se move segundo translações e na tarefa 5 pode efetuar rotações (Figura 10).

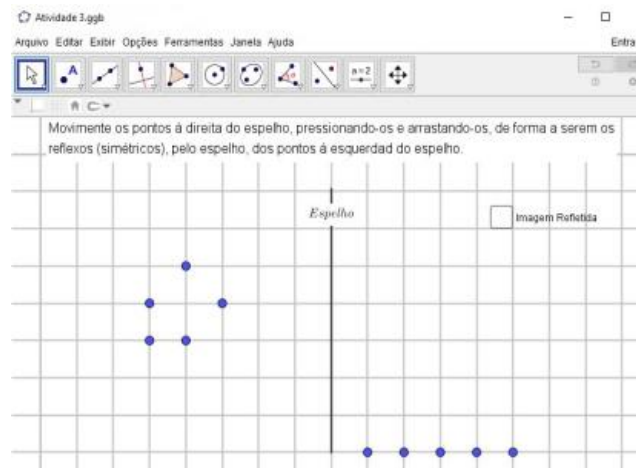


Figura 9 - Visualização da tarefa 3, proposta aos alunos

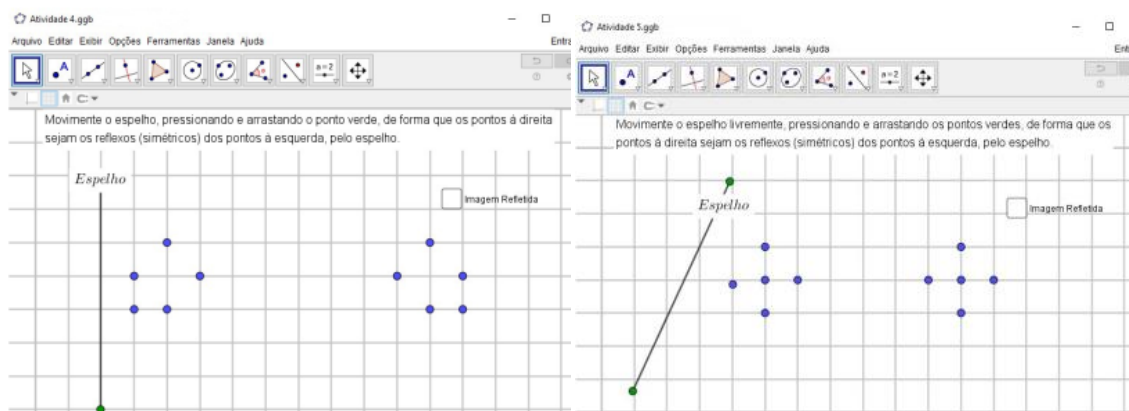


Figura 10 - Visualização das tarefas 4 e 5, propostas aos alunos

Cada uma das tarefas 6 e 7 (Figura 11) apresenta dois polígonos iguais e rígidos, sendo um deles fixo e posicionado à esquerda de um eixo também fixo. O outro polígono, manipulável, deveria ser movido de forma a ser posicionado como a imagem reflexa do polígono à esquerda, pela simetria associada a esse eixo.

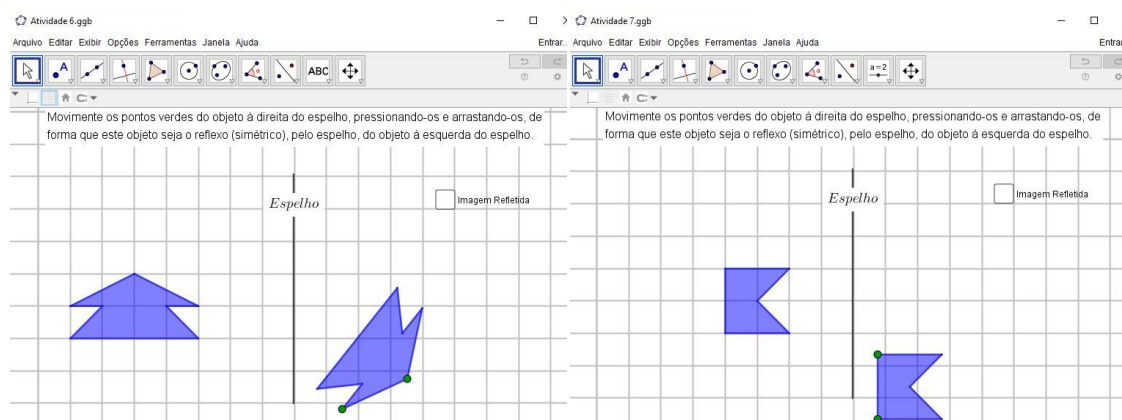


Figura 11 - Visualização das tarefas 6 e 7, propostas aos alunos

Em todas as tarefas anteriores, os alunos conferiram a resposta dada, selecionando a caixa “Imagem Refletida” e, caso fosse necessário, voltariam a realizá-la.

Na tarefa 8 (Figura 12), são dados três triângulos e três quadriláteros, além de um eixo manipulável que pode sofrer translações e rotações. Aqui o aluno deveria manipular o eixo a fim de verificar a existência de possíveis eixos de simetria em cada um dos polígonos, indicando a quantidade de eixos de simetria encontrados em cada um deles. Os alunos foram realizando as tarefas propostas, trocando ideias com os colegas do lado e conferindo se suas soluções estavam corretas. Apenas nesse momento foi feita uma pausa para dar lugar a uma discussão sobre quais polígonos possuem eixos de simetria e aqueles que não possuem. Com relação aos primeiros, foram comparadas as quantidades de eixos encontrados e o posicionamento desses mesmos eixos. A discussão foi livre entre os alunos, porém norteada pelos professores.

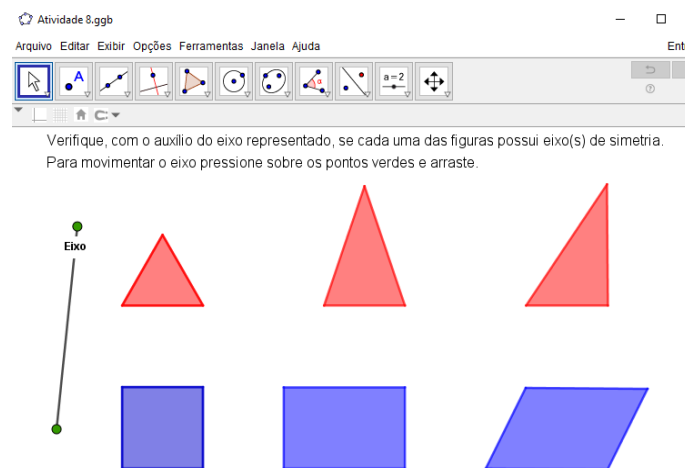


Figura 12 - Visualização da tarefa 8, proposta aos alunos

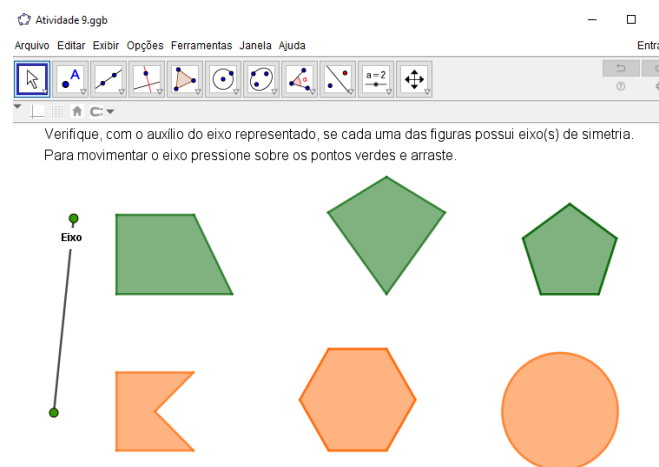


Figura 13 - Visualização da tarefa 9, proposta aos alunos

A tarefa 9 (Figura 13) é uma extensão da anterior, mas com outras classes de figuras. Apresentam-se um trapézio, um quadrilátero pipa, um pentágono regular, um pentágono côncavo em formato de bandeirinha, um hexágono regular e um círculo. Os alunos tiveram que encontrar possíveis eixos de simetria em cada uma das figuras apresentadas. Novamente, os alunos anotaram suas observações e a discussão anterior foi retomada.

4.2 Estudo da composição de simetrias de eixos não paralelos em ambiente dinâmico

A segunda fase dessa prática é composta por um conjunto de cinco tarefas que têm como suporte a malha isométrica em que são dados dois eixos não paralelos, simulando dois espelhos. A tarefa 10 (Figura 14) possui, além dos espelhos formando um ângulo de 60° , um triângulo equilátero, cuja localização e cujo tamanho podem ser alterados, posicionado entre eles. Os alunos movimentaram o triângulo por translações e rotações, e também fizeram seu redimensionamento. Nesse processo, eles foram observando as reflexões geradas pelos dois espelhos.

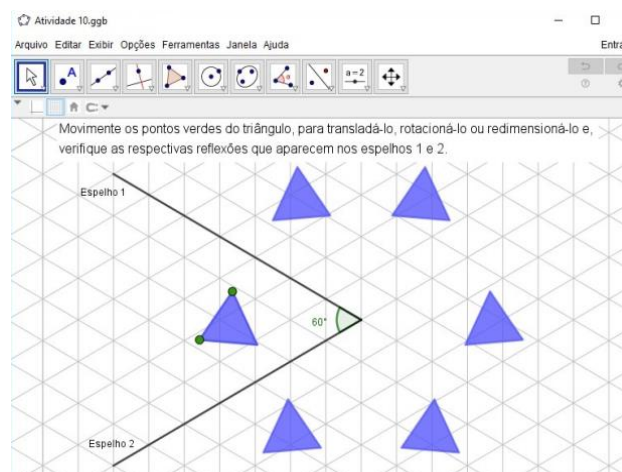


Figura 14 - Visualização da tarefa 10, proposta aos alunos

A tarefa 11 (Figura 15) apresenta dois espelhos posicionados formando um ângulo que, inicialmente, é de 30° , mas que está dependente de um controle deslizante variando de 30° a 120° , com um incremento de 30° e um objeto, posicionado entre eles, que vai gerando imagens por reflexões. Nesta atividade, os alunos manipularam o controle deslizante para variar o ângulo formado pelos espelhos, observaram a figura resultante nas respectivas reflexões, de acordo com cada ângulo, e efetuaram o registro dos aspectos que se lhes revelaram mais importante.

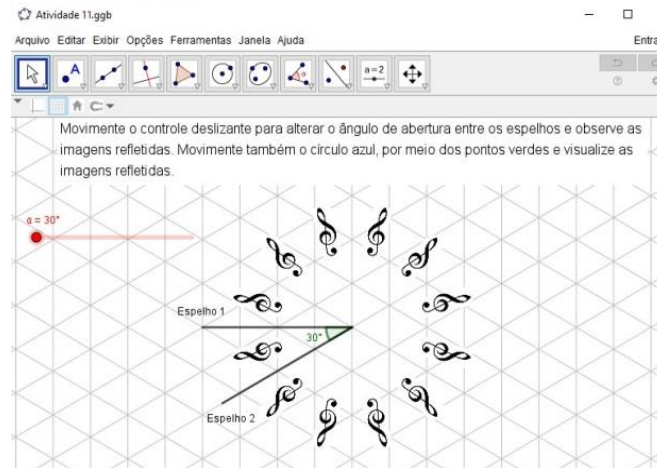


Figura 15 - Visualização da tarefa 11, proposta aos alunos

Nas tarefas 12 e 13, há dois espelhos posicionados formando um ângulo de 30° e um controle deslizante para o ângulo variando de 30° a 120°, com um incremento de 30°. Na primeira delas (Figura 16), há também um triângulo azul com lados sobre os espelhos e um vértice na sua interseção, gerando diferentes polígonos regulares com a variação do ângulo formado pelos espelhos. Os alunos manipularam o controle deslizante para variar o ângulo formado entre os espelhos e observaram a figura que está sendo refletida e respectivas propriedades, consoante o ângulo formado pelos espelhos.

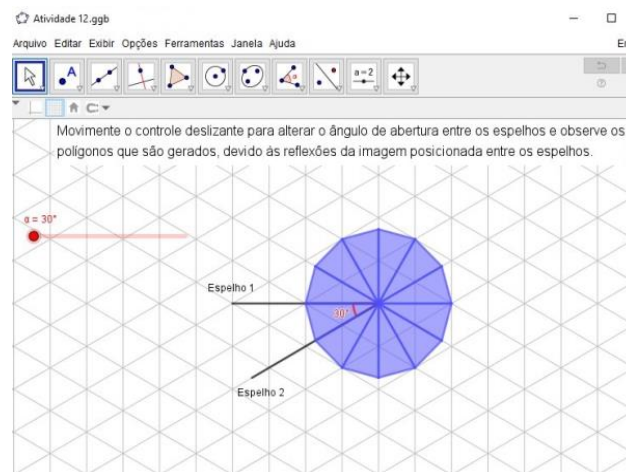


Figura 16 - Visualização da tarefa 10, proposta aos alunos

Já na tarefa 13 (Figura 17), existe um círculo entre os espelhos. Esse círculo pode ser transladado, rotacionado e redimensionado. Aqui, os alunos movimentaram livremente o círculo e observaram o efeito produzido nas imagens por tais movimentos, bem como o que decorria com a variação do ângulo produzida com a ativação do controle deslizante.

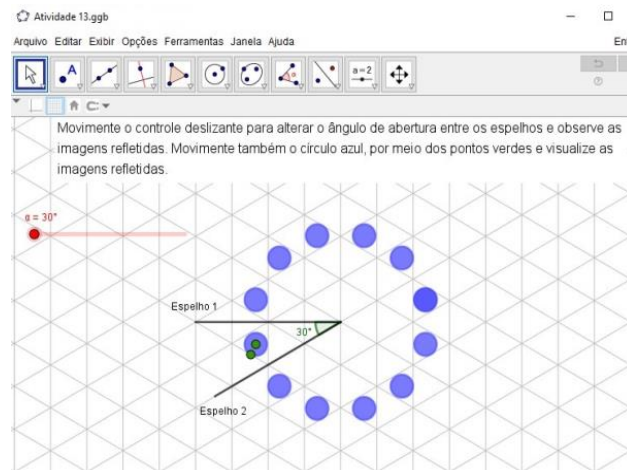


Figura 17 - Visualização da tarefa 13, proposta aos alunos

Na tarefa 14 (Figura 18), exibem-se alguns polígonos formando uma figura, posicionada entre os espelhos. Nessa tarefa, os alunos, com o cursor, alteraram a figura entre os espelhos e apenas observaram as pavimentações resultantes.

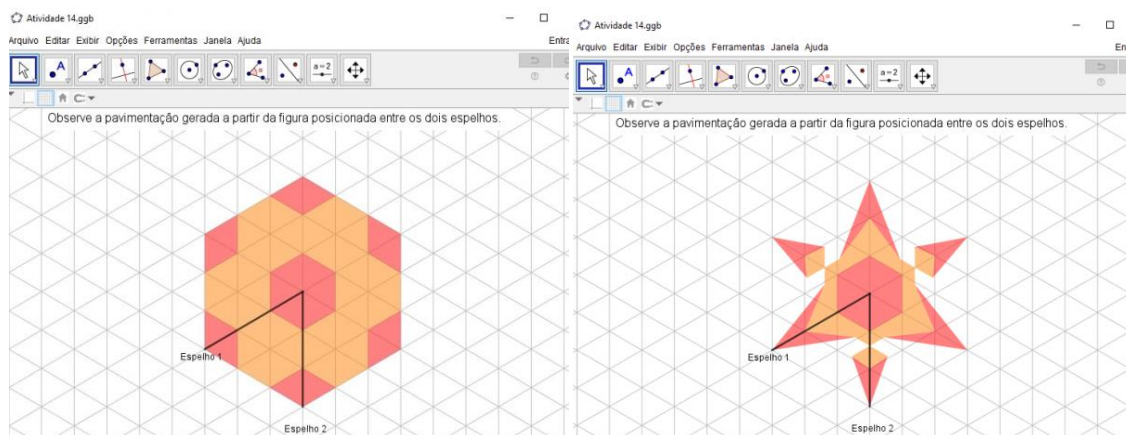


Figura 18 - Visualização da tarefa 14, proposta aos alunos

4.3 Uso do GeoGebra no estudo de pavimentações e bases geradoras

A terceira fase deste estudo é composta por um conjunto de tarefas em que se usam três espelhos, com o objetivo de que o aluno reconheça as reflexões nos mesmos, identifique e procure criar bases geradoras, bases transformadas e, finalmente, o padrão criado pelas reflexões em caleidoscópios. Em todas as tarefas os espelhos se posicionam de modo a formar um triângulo equilátero, uma vez que a culminância foi a construção de um caleidoscópio com base triangular equilátera. O interior desse triângulo vai sendo preenchido por diferentes objetos. Na tarefa 15, tem-se, também, um círculo azul localizado entre os espelhos. Ao lado, há três caixas de exibir/ocultar

objeto. Os alunos marcaram e desmarcaram as caixas correspondentes a 1ª reflexão, 2ª reflexão e 3ª reflexão, respectivamente e, a cada marcação, observaram as reflexões ocorridas nos três espelhos (Figura 19).

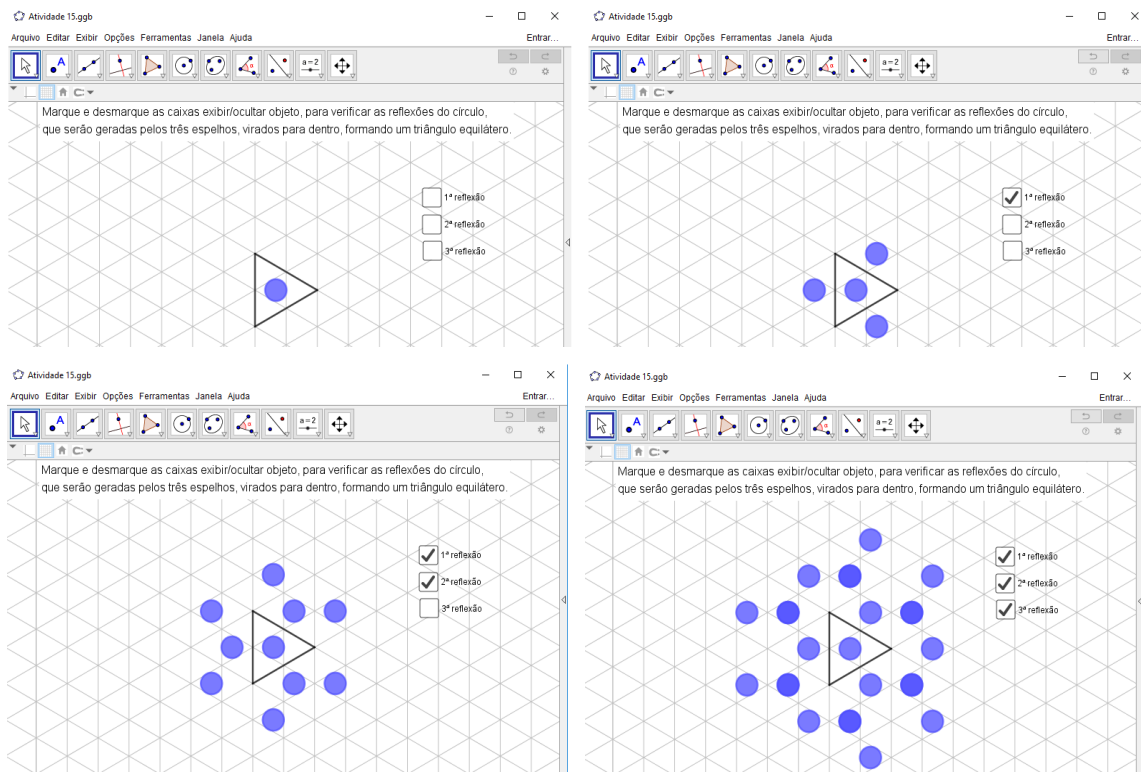


Figura 19 - Visualização das etapas da tarefa 15, proposta aos alunos

Na tarefa 16 (Figura 20), existe uma figura que preenche o triângulo formado pelos três espelhos e, ao lado, há quatro caixas de exibir/ocultar objeto. Aqui, os alunos observaram a ação dos três espelhos e a figura (base geradora) entre eles, marcaram as caixas para exibir os objetos, 1ª base transformada, 2ª base transformada, 3ª base transformada e 4ª base transformada, nesta ordem, e observaram as reflexões ocorridas em apenas um dos espelhos.

A tarefa 17 (Figura 21) é semelhante à anterior, permitindo a exibição de bases transformadas até a 3ª base transformada da reflexão de apenas um dos espelhos.

As tarefas 18 e 19 (Figura 22) exibem uma base geradora e uma caixa de exibir/ocultar o objeto, chamada pavimentação gerada. Nelas, os alunos observaram a base geradora posicionada no interior dos espelhos, em seguida marcaram a caixa pavimentação gerada e observaram a pavimentação gerada com a reflexão ocorrida nos três espelhos.

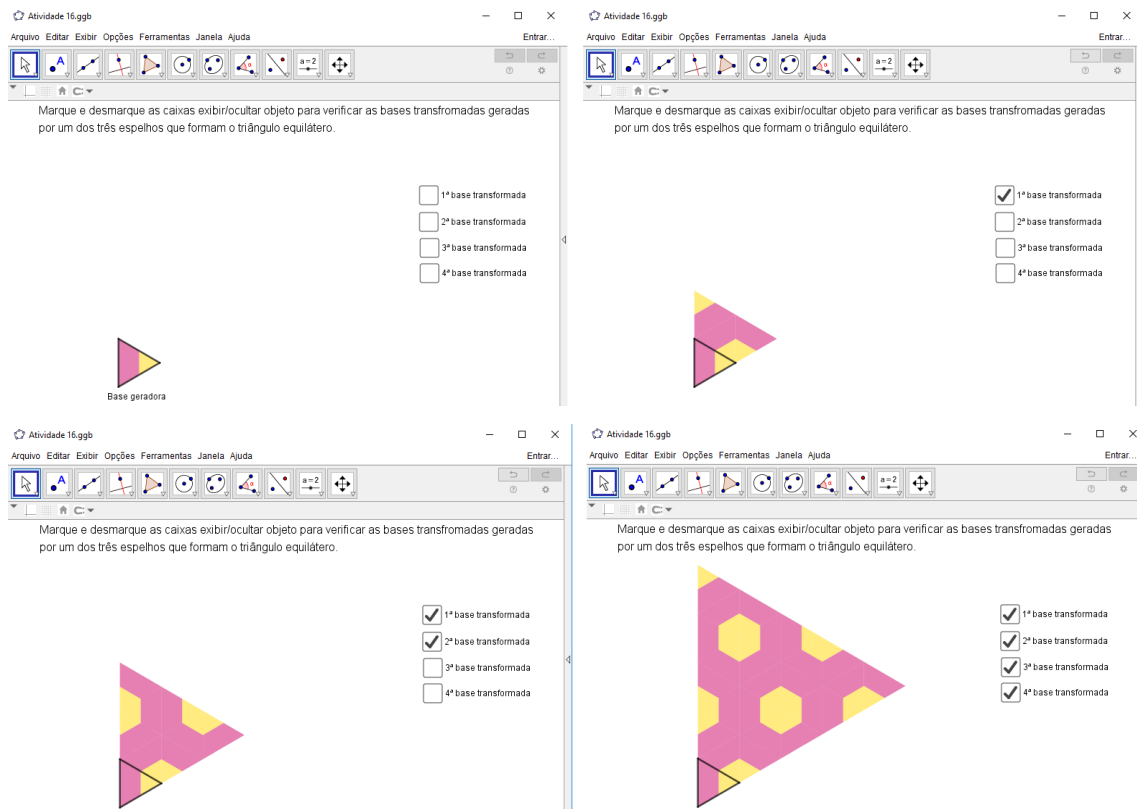


Figura 20 - Visualização das etapas da tarefa 16, proposta aos alunos

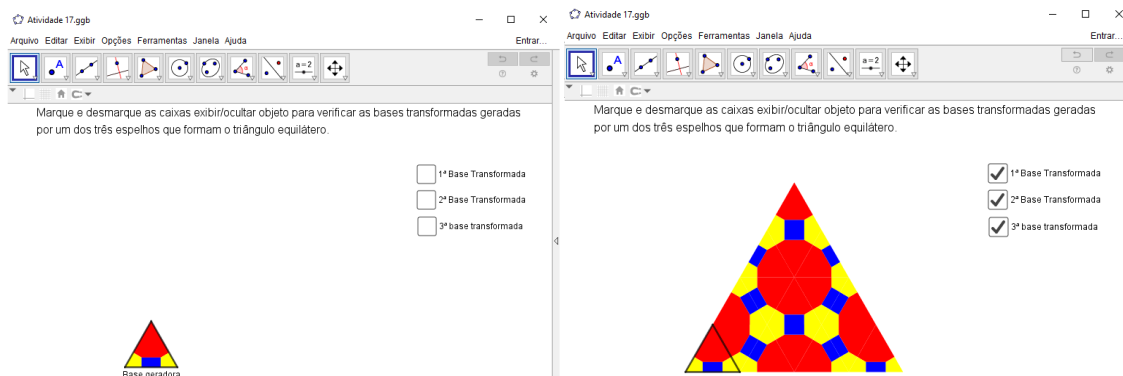


Figura 21 - Visualização da tarefa 17, proposta aos alunos

Finalmente, com uma dinâmica semelhante às anteriores, a tarefa 20 (Figura 23) permite criar pavimentações partindo de diferentes bases geradoras. Aqui, os alunos observaram a base geradora, em seguida marcaram a caixa de pavimentação gerada (caleidoscópio) e observaram o que ocorreu. Eles ainda puderam movimentar os pontos no interior da base para visualizar as transformações sofridas tanto na base quanto nas reflexões. A movimentação dos pontos simula a ideia de um caleidoscópio.

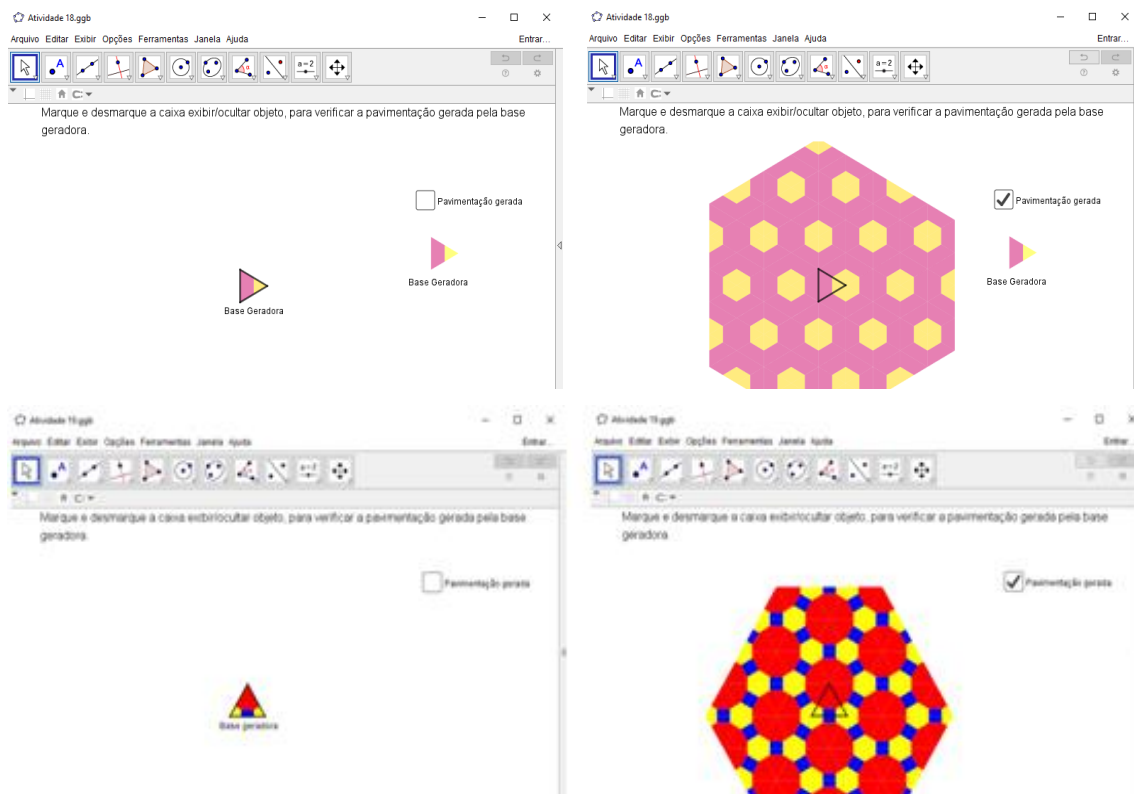


Figura 22 - Visualização das tarefas 18 e 19, propostas aos alunos

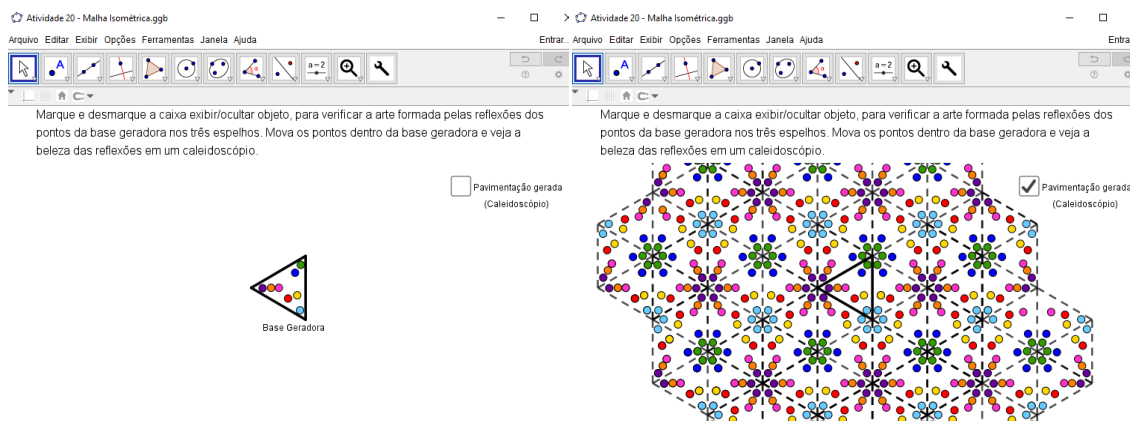


Figura 23 - Visualização da tarefa 20, proposta aos alunos

Todas as tarefas foram realizadas em sala juntamente com os professores, tendo sido prestada toda a orientação necessária para um melhor aproveitamento dos alunos. As atividades realizadas no GeoGebra foram também realizadas com material concreto a fim de consolidar o aprendizado.

4.4 Construção do caleidoscópio

Após o estudo dos conceitos propostos, os alunos já possuíam uma ideia do funcionamento de um caleidoscópio e de toda a geometria envolvida na construção de um objeto simples, mas que produz belas figuras.

Os alunos formaram um prisma triangular com os três espelhos planos. Cortaram dois triângulos de dimensões um pouco maiores que a base do prisma, um com papel manteiga e outro com papel transparente. Colaram o triângulo de papel manteiga em uma das bases do prisma, fechando totalmente uma das bases. Em seguida, colocaram as miçangas ou lantejoulas no interior do prisma e o fecharam, colando o triângulo de plástico transparente, na outra base.

Feito isto, cortaram um triângulo um pouco maior que a base do prisma, com um pedaço pequeno da cartolina e fizeram um orifício no centro do triângulo. Colaram este triângulo sobre o plástico transparente e colaram a cartolina ao redor do prisma (Figura 24).

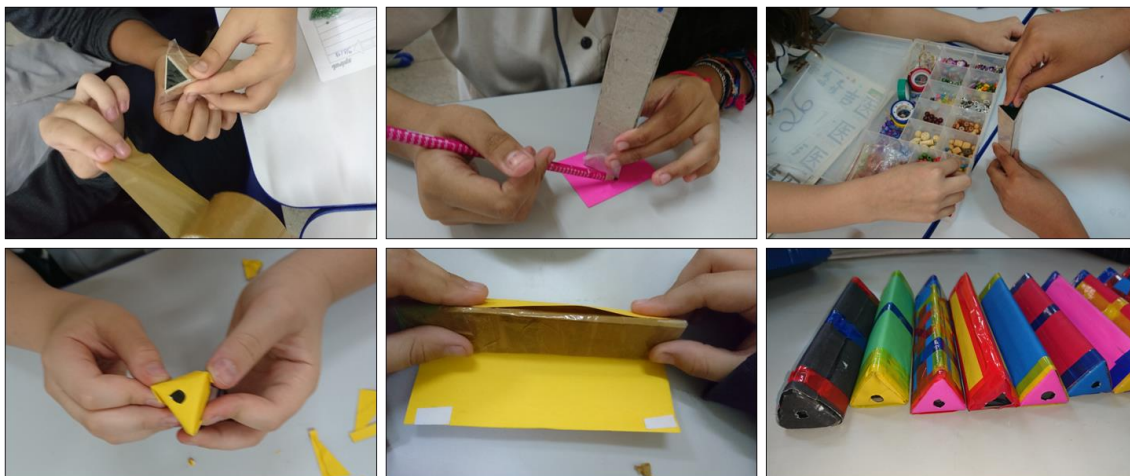


Figura 24 - Construção dos caleidoscópios

5 Conclusão

Sabe-se que existem diversas propostas metodológicas para o ensino de matemática e, em particular, de geometria. Sendo assim, não se pode afirmar, sem a realização de estudos científicos, que a aprendizagem efetiva ocorra sempre com a utilização desta ou daquela forma de ensino. Contudo, é importante propor e testar um leque imenso de possibilidades para trabalhar com os alunos em sala de aula, utilizando recursos didáticos e enfoques metodológicos diferentes.

Ressalta-se a necessidade de elaborar atividades que favoreçam o desenvolvimento de estruturas lógicas de pensamento, que tenham por resultado

prático o estabelecimento de condições para aquisição de outros conhecimentos, os quais podem colaborar para que os estudantes tomem decisões conscientes.

Segundo a observação dos professores que realizaram o experimento descrito neste artigo, o desenvolvimento do pensamento visual em sala de aula fez com que os alunos tivessem uma percepção figurativa do que está sendo ensinado, atribuindo significado aos conceitos tido como puramente abstratos. Dessa forma, a utilização da visualização no processo de aprendizado tem potencial para criar alicerces que possibilitam uma melhor compreensão de diferentes conceitos matemáticos.

Junto com os processos visuais, a utilização de tecnologias na educação tem se tornado um facilitador no processo de ensino-aprendizagem, pois dessa forma o aluno pode construir e/ou manipular determinado experimento, fazendo comparações, generalizações, análises e formulando conjecturas, além de permitir o trabalho colaborativo. Assim, promove-se a autonomia do aluno ao desenvolver sua autoconfiança estimulando o seu interesse pela Matemática. Este artigo, portanto, propõe um ensino de forma dinâmica, confrontando teoria e prática.

Ao finalizar as sucessivas etapas das tarefas propostas, os professores condutores das atividades perceberam que em cada uma delas o aluno atingiu um grau de conhecimento efetivo e mais consistente. O conjunto de tarefas iniciais permitiu ao aluno uma melhor compreensão do conceito de simetria axial, o qual passa a ser por ele apropriado, uma vez que ele pode participar ativamente na construção do conhecimento, manipulando, os eixos de simetria ou as figuras simétricas.

Após a segunda série de tarefas, o aluno terá percebido o que ocorre com as reflexões geradas por imagens posicionadas entre dois espelhos não paralelos e formando um ângulo menor do que 180° . Esta fase é crucial e o prepara para o terceiro momento, de maior complexidade e abstração, que consiste na construção do conceito de base geradora de uma pavimentação. Após esta atividade, os alunos participaram de uma feira de matemática, na qual explicaram o que desenvolveram aos demais colegas.

Referências

ALVES, Daniele S. P.. **Pavimentações e caleidoscópios: uma experiência em sala de aula**. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2019.

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan e PINTO, Jorge. **A utilização do Geogebra na demonstração Matemática em sala de aula**: o estudo da reta de Euler. BOLEMA –

Boletim de Educação Matemática. UNESP, Rio Claro, Vol. 29, nº 52, agosto/2015, pp 637 – 657.

BALDISSERA, Adelina. **Pesquisa-ação: uma metodologia do “conhecer” e do “agir” coletivo**. Sociedade em Debate, Pelotas, Vol. 7, n. 2, p.5-25, agosto/2001.

BASTITELA, Fátima e SANTOS, Marli Regina dos. **As pesquisas sobre a utilização de caleidoscópios e espelhos para o ensino de geometria no Brasil: de onde vêm, para onde vão?** , VII CIBEM, Montevideo, Uruguai, set/2013.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília. MEC/SEF, 1998.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2006.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, 2016.

DUVAL, Raymond. **Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in athemtical Thinking. Basic Issues for Learning**. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México, outubro 1999.

_____. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papyrus, 2003, p.11-33.

ENGEL, Guido Irineu. **Pesquisa-ação**: Educar, Curitiba, Editora da UFPR, n. 16, p.181 – 191, 2000.

GEELLEN, D. Songs of Innocence and of Experience: Impressionist tales and secret stories of live in classrooms. In: TAYLOR, P.; WALLACE, J. (Ed.). **Qualitative Research in Postmodern Times Exemplars for Science,Mathematics and Technology Educators**. New York: Springer, 2007, p. 139-148.

GOLDENBERG; Paul. **“Hábitos de pensamento”**: um princípio organizador para o currículo. Educação e Matemática nº 48, 37-44, 1998.

GRAVINA, M. L.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. In:IV Congresso RIBIE, Anais. Brasília, 1998.

LOURENÇO, M. T. C. **O ensino de geometria através da pavimentação do plano**. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2014.

MALTEMPI, M. V. **Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.

MARTINS, Renata Aparecida. **Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais.** UEP, Rio Claro (SP), 2003.

MURARI, Claudemir. **Pavimentações do plano por polígonos regulares e visualização em caleidoscópios.** X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Salvador – Bahia. SBEM - 2010.

_____. **Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática** Bolema - Mathematics Education Bulletin, v. 25, n. 41, p. 187-211, 2011.

PENTEADO, M. G.; BORBA, M. de C. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.